

## ESPONENZIALI E LOGARITMI

### ESERCIZI

#### 1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

$$1 \text{ A} \quad (5^2 \cdot 5^{4x}) : 5^x; \quad 4^x \cdot 4^{2x-2} : 16^x; \quad \sqrt{a} \cdot a^{x+2}; \quad \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^{2x}}}{\sqrt{a^3}}. \quad \left[ 5^{3x+2}; 2^{2x-4}; a^{\frac{2x+5}{2}}; a^{\frac{4x-5}{10}} \right]$$

$$1 \text{ B} \quad (7^3 \cdot 7^{2x}) : 7^{3x}; \quad 5^{3x} \cdot 25^{x+1} : 5^{x-1}; \quad \sqrt{a} \cdot a^{3-x}; \quad a^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{a^{2x}}}{\sqrt{a}}. \quad \left[ 7^{3-x}; 5^{4x+3}; a^{\frac{7-2x}{2}}; a^{\frac{4x+9}{6}} \right]$$

#### 2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

$$2 \text{ A} \quad y = 2^{x-1}; \quad y = 2^x - 1.$$

$$2 \text{ B} \quad y = 3^{x-2}; \quad y = 3^x - 2.$$

Disegna il grafico della funzione  $y = f(x)$  indicata. Traccia poi i grafici delle funzioni indicate a lato, dopo averne scritto l'espressione analitica.

$$3 \text{ A} \quad y = f(x) = 3^x; \quad y = f(-x), y = -f(x), y = f(|x|), y = -f(|x-2|).$$

$$3 \text{ B} \quad y = f(x) = 2^x; \quad y = f(-x), y = -f(x), y = f(|x|), y = -f(|x|+1).$$

Trasforma la seguente funzione mediante la dilatazione indicata a fianco e rappresentala graficamente.

$$4 \text{ A} \quad y = 3^{4x+2} \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{9}y \end{cases} \quad [y = 9^x]$$

$$4 \text{ B} \quad y = 4^{x-3} \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 16y \end{cases} \quad [y = 2^{x-2}]$$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

$$5 \text{ A} \quad y = \frac{5}{6^{x+1}} \quad [\forall x \in \mathbf{R}]$$

$$5 \text{ B} \quad y = -\frac{2}{3^{x-1}} \quad [\forall x \in \mathbf{R}]$$

$$6 \text{ A} \quad y = 2^{\sqrt{2x+3}} \quad \left[ x \geq -\frac{3}{2} \right]$$

$$6 \text{ B} \quad y = 3^{\sqrt{2x+1}} \quad \left[ x \geq -\frac{1}{2} \right]$$

### 3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

$$7 \text{ A} \quad 2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} = 5 \quad [x = 2]$$

$$7 \text{ B} \quad 3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 63 \quad [x = 3]$$

$$8 \text{ A} \quad 3^x + 3^{3-x} = 12 \quad [x = 1 \vee x = 2]$$

$$8 \text{ B} \quad 2^x + 2^{5-x} = 12 \quad [x = 2 \vee x = 3]$$

$$9 \text{ A} \quad 6^{\frac{6}{x}} \cdot 6^{\frac{8}{x+3}} \cdot 6^{-\frac{2x+1}{x}} = 1 \quad \left[ x = -\frac{3}{2} \vee x = 5 \right]$$

$$9 \text{ B} \quad 7^{\frac{6}{x-3}} \cdot 7^{\frac{8}{x}} \cdot 7^{-\frac{2x-5}{x-3}} = 1 \quad \left[ x = \frac{3}{2} \vee x = 8 \right]$$

### 4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvi la seguente disequazione esponenziale.

$$10 \text{ A} \quad 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 9 \quad [x < -1]$$

$$10 \text{ B} \quad 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 3 \quad [x < -2]$$

Risolvi il seguente sistema.

$$\mathbf{11 A} \quad \begin{cases} 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \geq \frac{1}{18} \\ 4^x + 2^x > 20 \end{cases} \quad [x > 2]$$

$$\mathbf{11 B} \quad \begin{cases} 2^{x+3} \cdot 5^{x+1} < 4 \\ 9^x - 8 \cdot 3^x \leq 9 \end{cases} \quad [x < -1]$$

### 5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

$$\mathbf{12 A} \quad \log_2 \frac{1}{16}; \quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8}; \quad \log_{0,01} 100; \quad \log_{\sqrt{3}} 9. \quad [-4; -3; -1; 4]$$

$$\mathbf{12 B} \quad \log_3 \frac{1}{27}; \quad \log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4}; \quad \log_{0,01} 10000; \quad \log_{\sqrt{2}} 16. \quad [-3; -2; -2; 8]$$

Calcola il valore della base  $a$  usando la definizione di logaritmo.

$$\mathbf{13 A} \quad \log_a 25 = 2; \quad \log_a 7 = -1; \quad \log_a 3 = -4; \quad \log_a \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}. \quad \left[ 5; \frac{1}{7}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}; 25 \right]$$

$$\mathbf{13 B} \quad \log_a 49 = 2; \quad \log_a 5 = -1; \quad \log_a 3 = -3; \quad \log_a \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}. \quad \left[ 7; \frac{1}{5}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 16 \right]$$

### 6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Svilupa le seguenti espressioni, applicando le proprietà dei logaritmi.

$$\mathbf{14 A} \quad \log_2 \left( \frac{1+\sqrt{3}}{4} \right)^2; \quad \log(3a^2b^2); \quad \log \frac{a^3}{\sqrt{ab}}.$$

$$\left[ 2\log_2(1+\sqrt{3}) - 4; \log 3 + 2\log a + 2\log b; \frac{5}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b \right]$$

**14 B**  $\log_3 \left( \frac{2+\sqrt{3}}{3} \right)^2$ ;  $\log(5a^3b^4)$ ;  $\log \frac{a^2}{\sqrt{ab}}$ .  
 $\left[ 2\log_3(2+\sqrt{3}) - 2; \log 5 + 3\log a + 4\log b; \frac{3}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b \right]$

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere la seguente espressione sotto forma di un unico logaritmo.

**15 A**  $\frac{1}{2}[\log x + \log(x+2)] - 3\log(x^2+1)$   $\left[ \log \frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x^2+1)^3} \right]$

**15 B**  $\frac{1}{2}[\log x - \log(x+4)] + 2\log(x^2-1)$   $\left[ \log \left( \sqrt{\frac{x}{x+4}} \cdot (x^2-1)^2 \right) \right]$

Scrivi i seguenti logaritmi usando il logaritmo in base 10 e calcolane il valore approssimato con quattro cifre decimali.

**16 A**  $\log_5 62$ ;  $\log_{0,1} 8$ ;  $\log_{32} 541$ .

**16 B**  $\log_7 39$ ;  $\log_{0,2} 9$ ;  $\log_{27} 482$ .

**7. LA FUNZIONE LOGARITMICA**

Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano.

**17 A**  $y = \ln x$ ;  $y = \ln(x+2)$ ;  $y = \ln x + 2$ .

**17 B**  $y = \log_2 x$ ;  $y = \log_2(x-1)$ ;  $y = \log_2 x - 1$ .

Disegna il grafico della funzione  $y = f(x)$  indicata. Traccia poi i grafici delle funzioni indicate a lato, dopo averne scritto l'espressione analitica.

**18 A**  $y = f(x) = \log_2 x$ ;  $y = f(-x), y = -f(x), y = f(|x|), y = 3 + f(|x+1|)$ .

**18 B**  $y = f(x) = \ln x$ ;  $y = f(-x), y = -f(x), y = f(|x|), y = 2 - f(|x-5|)$ .

Trasla la seguente funzione del vettore indicato a fianco.

**19 A**  $y = 3 + \ln(4 - x); \quad \vec{v}(2; -1). \quad [y = 2 + \ln(6 - x)]$

**19 B**  $y = 1 + \ln(2x - 1); \quad \vec{v}(1; -2). \quad [y = \ln(2x - 3) - 1]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

**20 A**  $y = \frac{\log(x + 2)}{\log(x - 3)} \quad [x > 3 \wedge x \neq 4]$

**20 B**  $y = \frac{\log(x - 2)}{\log(x - 4)} \quad [x > 4 \wedge x \neq 5]$

**21 A**  $y = \ln \frac{2x}{\sqrt{x - 1}} \quad [x > 1]$

**21 B**  $y = \ln \frac{5x}{\sqrt{x - 3}} \quad [x > 3]$

**22 A**  $y = \log(\sqrt{x} - 1) + \log(4 - |x|) + 3 \quad [1 < x < 4]$

**22 B**  $y = \log(2 - \sqrt{x}) + \log(|x| - 1) + 3 \quad [1 < x < 4]$

Disegna il grafico della funzione  $f(x)$  e poi quello di  $y = e^{f(x)}$ .

**23 A**  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \frac{4x}{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$

**23 B**  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{6x}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Disegna il grafico della funzione  $f(x)$  e poi quello di  $y = \ln f(x)$ .

**24 A**  $f(x) = 3 - \sqrt{9 - x^2}$

**24 B**  $f(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}$

**8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE**

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche.

- 25 A**  $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 2 + \log_2 3$  [ $x = 2$ ]
- 25 B**  $\log_3(x+2) + \log_3(x+3) = 1 + \log_3 4$  [ $x = 1$ ]
- 26 A**  $\log 2 + \log(x^2 - 2x - 1) = 2\log(x-1)$  [ $x = 3$ ]
- 26 B**  $\log 2 + \log(x^2 - 4x + 2) = 2\log(x-2)$  [ $x = 4$ ]
- 27 A**  $\ln(x+5) + \ln(x-5) = 2\ln 5$  [ $x = 5\sqrt{2}$ ]
- 27 B**  $\ln(9-x^2) + \ln(x+3) = 3\ln 3$  [ $x = 0 \vee x = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$ ]
- 28 A**  $\log_3(x+5) - \log_9(x+3) = \log_9(3x+1)$  [ $x = \sqrt{11}$ ]
- 28 B**  $\log_2(2x-1) = \log_4(1+x) + \log_4(4x-5)$  [ $x = 2$ ]

Risolvi il seguente sistema.

- 29 A** 
$$\begin{cases} \log_2 x^2 - 2\log_2 y = 2 \\ 2^x + 2^{y+1} - 8 = 0 \end{cases}$$
 [ $(2;1)$ ]
- 29 B** 
$$\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 \\ 3^{x+2} \cdot 2^x = \frac{6^{3y}}{4} \end{cases}$$
 [ $(\frac{11}{2}; \frac{5}{2})$ ]

**9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE**

Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche.

- 30 A**  $\log_3\left(\frac{x+4}{x-2}\right) > 1$  [ $2 < x < 5$ ]
- 30 B**  $\log_2\left(\frac{x+3}{x-4}\right) > 1$  [ $4 < x < 11$ ]
- 31 A**  $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}(12-x)$  [ $4 < x < 12$ ]
- 31 B**  $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(10-x)$  [ $2 < x < 10$ ]

**32 A**  $\log(x+1) + \log(x+3) < \log 3 + \log(2x+1)$   $[0 < x < 2]$

**32 B**  $\log(x+3) + \log(x+5) < \log 3 + \log(2x+5)$   $[-2 < x < 0]$

**10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI**

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni.

**33 A**  $2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 16$   $\left[ x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 5} \right]$

**33 B**  $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1} = 7$   $\left[ x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 4} \right]$

**34 A**  $2^{x+3} - 2^{x+2} + 20 \cdot 2^x = 168$   $\left[ x = \frac{\log 7}{\log 2} \right]$

**34 B**  $2 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x = 14$   $\left[ x = \frac{\log 2}{\log 3} \right]$

**35 A**  $2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} < 2^{x+3} - 3^x$   $\left[ x < \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2} \right]$

**35 B**  $2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 2^x < 2^{x+2} - 2 \cdot 3^x$   $\left[ x < \frac{\log 7 - \log 8}{\log 3 - \log 2} \right]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

**36 A**  $y = \frac{\log(x^2 + 3x) - 1}{\log(11 - 2x) - \log x}$   $\left[ 0 < x < \frac{11}{2} \wedge x \neq \frac{11}{3} \right]$

**36 B**  $y = \frac{\log(x^2 + 3x) - 1}{\log(17 - 2x) - \log(x - 3)}$   $\left[ 3 < x < \frac{17}{2} \wedge x \neq \frac{20}{3} \right]$

**37 A**  $y = \sqrt{5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2}$   $\left[ x \leq 0 \vee x \geq \frac{\log 2}{\log 5} \right]$

**37 B**  $y = \sqrt{7^{2x} - 4 \cdot 7^x + 3}$   $\left[ x \leq 0 \vee x \geq \frac{\log 3}{\log 7} \right]$

**38 A**  $y = \frac{3^x}{\sqrt{25^x - 5^{x+1} + 4}}$   $\left[ x < 0 \vee x > \frac{\log 4}{\log 5} \right]$

**38 B**  $y = \frac{5^x}{\sqrt{9^x - 3^{x+1} + 2}}$

$$\left[ x < 0 \vee x > \frac{\log 2}{\log 3} \right]$$

**LA RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI**

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni, utilizzando il metodo grafico.

**39 A**  $|4 - x^2| = \ln(x - 1)$   $[x = 2]$

**39 B**  $|9 - x^2| = \ln(x - 2)$   $[x = 3]$

**40 A**  $e^{x+1} = -x^3$   $[x = -1]$

**40 B**  $e^{x-1} = x^3$   $[x = 1]$

**41 A**  $e^{x+1} + 2 \geq |x - 2|$   $[x \geq -2]$

**41 B**  $e^{x+1} + 1 \geq |x - 1|$   $[x \geq -1]$

**42 A**  $|x| + 1 \geq \ln|x|$   $[\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}]$

**42 B**  $|x| + 2 \leq \ln|x|$   $[S = \emptyset]$