02 ESPONENZIALI E LOGARITMI

ESERCIZI

1. LE POTENZE CON ESPONENTE REALE

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

1 A $\left(5^2 \cdot 5^{4x}\right):5^x; \quad 4^x \cdot 4^{2x-2}:16^x; \quad \sqrt{a}\cdot a^{x+2}; \quad \dfrac{a\cdot\sqrt[5]{a^{2x}}}{\sqrt{a^3}}.$ $\left[5^{3x+2};\, 2^{2x-4};\, a^{\frac{2x+5}{2}};\, a^{\frac{4x-5}{10}}\right]$

1 B $\left(7^3 \cdot 7^{2x}\right):7^{3x}; \quad 5^{3x}\cdot 25^{x+1}:5^{x-1}; \quad \sqrt{a}\cdot a^{3-x}; \quad a^2\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^{2x}}}{\sqrt{a}}.$ $\left[7^{3-x};\, 5^{4x+3};\, a^{\frac{7-2x}{2}};\, a^{\frac{4x+9}{6}}\right]$

2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

2 A $y=2^{x-1}; \quad y=2^x-1.$

2 B $y=3^{x-2}; \quad y=3^x-2.$

Disegna il grafico della funzione $y=f(x)$ indicata. Traccia poi i grafici delle funzioni indicate a lato, dopo averne scritto l'espressione analitica.

3 A $y=f(x)=3^x; \quad y=f(-x),\, y=-f(x),\, y=f(|x|),\, y=-f(|x-2|).$

3 B $y=f(x)=2^x; \quad y=f(-x),\, y=-f(x),\, y=f(|x|),\, y=-f(|x|+1).$

Trasforma la seguente funzione mediante la dilatazione indicata a fianco e rappresentala graficamente.

4 A $y=3^{4x+2} \quad \begin{cases} x'=2x \\ y'=\dfrac{1}{9}y \end{cases}$ $\left[y=9^x\right]$

4 B $y=4^{x-3} \quad \begin{cases} x'=2x \\ y'=16y \end{cases}$ $\left[y=2^{x-2}\right]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

5 A $y=\frac{5}{6^{x+1}}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

5 B $y=-\frac{2}{3^{x-1}}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

6 A $y=2^{\sqrt{2x+3}}$ $\left[x \geq -\frac{3}{2}\right]$

6 B $y=3^{\sqrt{2x+1}}$ $\left[x \geq -\frac{1}{2}\right]$

3. LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

7 A $2^{x+1}-2^{x}+2^{x-2}=5$ $[x=2]$

7 B $3^{x+1}-3^{x}+3^{x-1}=63$ $[x=3]$

8 A $3^{x}+3^{3-x}=12$ $[x=1 \vee x=2]$

8 B $2^{x}+2^{5-x}=12$ $[x=2 \vee x=3]$

9 A $6^{\frac{6}{x}} \cdot 6^{\frac{8}{x+3}} \cdot 6^{-\frac{2x+1}{x}}=1$ $\left[x=-\frac{3}{2} \vee x=5\right]$

9 B $7^{\frac{6}{x-3}} \cdot 7^{\frac{8}{x}} \cdot 7^{-\frac{2x-5}{x-3}}=1$ $\left[x=\frac{3}{2} \vee x=8\right]$

4. LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvi la seguente disequazione esponenziale.

10 A $7 \cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>9$ $[x<-1]$

10 B $7 \cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>3$ $[x<-2]$

Risolvi il seguente sistema.

11 A $\begin{cases} 2^{x+2}\cdot 3^{x+1}\geq \dfrac{1}{18} \\ 4^x+2^x>20 \end{cases}$ $[x>2]$

11 B $\begin{cases} 2^{x+3}\cdot 5^{x+1}<4 \\ 9^x-8\cdot 3^x\leq 9 \end{cases}$ $[x<-1]$

5. LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

12 A $\log_2\dfrac{1}{16}$; $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{27}{8}$; $\log_{0,01}100$; $\log_{\sqrt{3}}9$. $[-4;-3;-1;4]$

12 B $\log_3\dfrac{1}{27}$; $\log_{\frac{2}{5}}\dfrac{25}{4}$; $\log_{0,01}10\,000$; $\log_{\sqrt{2}}16$. $[-3;-2;-2;8]$

Calcola il valore della base *a* usando la definizione di logaritmo.

13 A $\log_a 25=2$; $\log_a 7=-1$; $\log_a 3=-4$; $\log_a\dfrac{1}{5}=-\dfrac{1}{2}$. $\left[5;\dfrac{1}{7};\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};25\right]$

13 B $\log_a 49=2$; $\log_a 5=-1$; $\log_a 3=-3$; $\log_a\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}$. $\left[7;\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};16\right]$

6. LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Sviluppa le seguenti espressioni, applicando le proprietà dei logaritmi.

14 A $\log_2\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2$; $\log\left(3a^2b^2\right)$; $\log\dfrac{a^3}{\sqrt{ab}}$.

$\left[2\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)-4;\log 3+2\log a+2\log b;\dfrac{5}{2}\log a-\dfrac{1}{2}\log b\right]$

14 B $\log_3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $\log\left(5a^3b^4\right)$; $\log\frac{a^2}{\sqrt{ab}}$.

$\left[2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)-2; \log 5+3\log a+4\log b; \frac{3}{2}\log a-\frac{1}{2}\log b\right]$

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere la seguente espressione sotto forma di un unico logaritmo.

15 A $\frac{1}{2}\left[\log x+\log\left(x+2\right)\right]-3\log\left(x^2+1\right)$ $\left[\log\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)^3}\right]$

15 B $\frac{1}{2}\left[\log x-\log\left(x+4\right)\right]+2\log\left(x^2-1\right)$ $\left[\log\left(\sqrt{\frac{x}{x+4}}\cdot\left(x^2-1\right)^2\right)\right]$

Scrivi i seguenti logaritmi usando il logaritmo in base 10 e calcolane il valore approssimato con quattro cifre decimali.

16 A $\log_5 62$; $\log_{0,1} 8$; $\log_{32} 541$.

16 B $\log_7 39$; $\log_{0,2} 9$; $\log_{27} 482$.

7. LA FUNZIONE LOGARITMICA

Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano.

17 A $y=\ln x$; $y=\ln\left(x+2\right)$; $y=\ln x+2$.

17 B $y=\log_2 x$; $y=\log_2\left(x-1\right)$; $y=\log_2 x-1$.

Disegna il grafico della funzione $y=f\left(x\right)$ indicata. Traccia poi i grafici delle funzioni indicate a lato, dopo averne scritto l'espressione analitica.

18 A $y=f\left(x\right)=\log_2 x$; $y=f\left(-x\right)$, $y=-f\left(x\right)$, $y=f\left(|x|\right)$, $y=3+f\left(|x+1|\right)$.

18 B $y=f\left(x\right)=\ln x$; $y=f\left(-x\right)$, $y=-f\left(x\right)$, $y=f\left(|x|\right)$, $y=2-f\left(|x-5|\right)$.

Trasla la seguente funzione del vettore indicato a fianco.

19 A $y=3+\ln(4-x);$ $\vec{v}(2;-1).$ $[y=2+\ln(6-x)]$

19 B $y=1+\ln(2x-1);$ $\vec{v}(1;-2).$ $[y=\ln(2x-3)-1]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

20 A $y=\dfrac{\log(x+2)}{\log(x-3)}$ $[x>3 \wedge x\neq 4]$

20 B $y=\dfrac{\log(x-2)}{\log(x-4)}$ $[x>4 \wedge x\neq 5]$

21 A $y=\ln\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$ $[x>1]$

21 B $y=\ln\dfrac{5x}{\sqrt{x-3}}$ $[x>3]$

22 A $y=\log\left(\sqrt{x}-1\right)+\log\left(4-|x|\right)+3$ $[1<x<4]$

22 B $y=\log\left(2-\sqrt{x}\right)+\log\left(|x|-1\right)+3$ $[1<x<4]$

Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y=e^{f(x)}$.

23 A $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1} & \text{se } x<-1\\ \dfrac{4x}{x+1} & \text{se } x>-1\end{cases}$

23 B $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1} & \text{se } x<1\\ \dfrac{6x}{x-1} & \text{se } x>1\end{cases}$

Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y=\ln f(x)$.

24 A $f(x)=3-\sqrt{9-x^2}$

24 B $f(x)=4-\sqrt{16-x^2}$

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche.

25 A $\log_2(x+1)+\log_2(x+2)=2+\log_2 3$ $[x=2]$

25 B $\log_3(x+2)+\log_3(x+3)=1+\log_3 4$ $[x=1]$

26 A $\log 2+\log\left(x^2-2x-1\right)=2\log(x-1)$ $[x=3]$

26 B $\log 2+\log\left(x^2-4x+2\right)=2\log(x-2)$ $[x=4]$

27 A $\ln(x+5)+\ln(x-5)=2\ln 5$ $\left[x=5\sqrt{2}\right]$

27 B $\ln\left(9-x^2\right)+\ln(x+3)=3\ln 3$ $\left[x=0 \vee x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right]$

28 A $\log_3(x+5)-\log_9(x+3)=\log_9(3x+1)$ $\left[x=\sqrt{11}\right]$

28 B $\log_2(2x-1)=\log_4(1+x)+\log_4(4x-5)$ $[x=2]$

Risolvi il seguente sistema.

29 A $\begin{cases}\log_2 x^2-2\log_2 y=2\\ 2^x+2^{y+1}-8=0\end{cases}$ $[(2;1)]$

29 B $\begin{cases}\log_3(x-y)=1\\ 3^{x+2}\cdot 2^x=\dfrac{6^{3y}}{4}\end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{5}{2}\right)\right]$

9. LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche.

30 A $\log_3\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right)>1$ $[2<x<5]$

30 B $\log_2\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)>1$ $[4<x<11]$

31 A $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<\log_{\frac{1}{2}}(12-x)$ $[4<x<12]$

31 B $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}(10-x)$ $[2<x<10]$

32 A $\log(x+1)+\log(x+3)<\log3+\log(2x+1)$ $[0<x<2]$

32 B $\log(x+3)+\log(x+5)<\log3+\log(2x+5)$ $[-2<x<0]$

10. I LOGARITMI E LE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni.

33 A $2\cdot5^x-3\cdot5^{x-1}+5^{x+1}=16$ $\left[x=\dfrac{\log5-\log2}{\log5}\right]$

33 B $2\cdot4^x-3\cdot4^{x-1}+4^{x+1}=7$ $\left[x=\dfrac{\log4-\log3}{\log4}\right]$

34 A $2^{x+3}-2^{x+2}+20\cdot2^x=168$ $\left[x=\dfrac{\log7}{\log2}\right]$

34 B $2\cdot3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}-5\cdot3^x=14$ $\left[x=\dfrac{\log2}{\log3}\right]$

35 A $2\cdot3^{x+1}-3\cdot2^{x+1}<2^{x+3}-3^x$ $\left[x<\dfrac{\log2}{\log3-\log2}\right]$

35 B $2\cdot3^{x+1}-3\cdot2^x<2^{x+2}-2\cdot3^x$ $\left[x<\dfrac{\log7-\log8}{\log3-\log2}\right]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

36 A $y=\dfrac{\log(x^2+3x)-1}{\log(11-2x)-\log x}$ $\left[0<x<\dfrac{11}{2}\wedge x\neq\dfrac{11}{3}\right]$

36 B $y=\dfrac{\log(x^2+3x)-1}{\log(17-2x)-\log(x-3)}$ $\left[3<x<\dfrac{17}{2}\wedge x\neq\dfrac{20}{3}\right]$

37 A $y=\sqrt{5^{2x}-3\cdot5^x+2}$ $\left[x\leq0\vee x\geq\dfrac{\log2}{\log5}\right]$

37 B $y=\sqrt{7^{2x}-4\cdot7^x+3}$ $\left[x\leq0\vee x\geq\dfrac{\log3}{\log7}\right]$

38 A $y=\dfrac{3^x}{\sqrt{25^x-5^{x+1}+4}}$ $\left[x<0\vee x>\dfrac{\log4}{\log5}\right]$

38 B $y=\dfrac{5^x}{\sqrt{9^x-3^{x+1}+2}}$ $\left[x<0 \vee x>\dfrac{\log 2}{\log 3}\right]$

LA RISOLUZIONE GRAFICA DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni, utilizzando il metodo grafico.

39 A $\left|4-x^2\right|=\ln(x-1)$ $[x=2]$

39 B $\left|9-x^2\right|=\ln(x-2)$ $[x=3]$

40 A $e^{x+1}=-x^3$ $[x=-1]$

40 B $e^{x-1}=x^3$ $[x=1]$

41 A $e^{x+1}+2\geq|x-2|$ $[x\geq -2]$

41 B $e^{x+1}+1\geq|x-1|$ $[x\geq -1]$

42 A $|x|+1\geq \ln|x|$ $\left[\forall x\in \mathbf{R}-\{0\}\right]$

42 B $|x|+2\leq \ln|x|$ $[S=\varnothing]$