

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

L'introduzione dell'energia potenziale e dell'energia cinetica ci permette di formulare un principio potente e universale applicabile alla soluzione dei problemi che sono difficili da risolvere con le leggi di Newton.

Se solleviamo un libro da una altezza y_a ad un'altezza y_b nel sistema libro-Terra è immagazzinata energia potenziale gravitazionale, che possiamo calcolare dal lavoro compiuto da un agente esterno sul sistema. Infatti:

$$L = mgy_b - mgy_a$$

Dal teorema dell'energia cinetica sappiamo, inoltre, che

$$L = \Delta K$$

Quindi, uguagliando queste due espressioni per il lavoro svolto sul libro, si ha:

$$\Delta K = mgy_b - mgy_a$$

La quantità al secondo membro può anche essere scritta in relazione all'energia potenziale posseduta dal sistema. Infatti:

$$mgy_b - mgy_a = -(mgy_a - mgy_b) = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g$$

Dove U_g è l'energia potenziale gravitazionale del sistema.

In definitiva potremo scrivere:

$$\Delta K = -\Delta U_g$$

E cioè

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

In questa equazione il primo membro rappresenta la somma delle variazioni di energia immagazzinata nel sistema e il secondo membro è la somma dei trasferimenti attraverso il contorno del sistema. Questo, nel caso presente, è uguale a zero, perché il nostro sistema libro-terra è isolato dall'ambiente.

Se scriviamo le variazioni di energia esplicitamente si ha:

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0 \quad \rightarrow \quad K_f + U_f = K_i + U_i$$

Definiamo energia meccanica di un sistema la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale possedute dal sistema:

$$E_{mecc} = K + U$$

La relazione

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Rappresenta il cosiddetto teorema di conservazione dell'energia meccanica e può essere enunciato come segue:

“In un sistema isolato, l'energia meccanica totale (data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale) si conserva”

Esplicitando ulteriormente la relazione $K_f + U_f = K_i + U_i$ possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

Questa relazione la useremo in moltissime applicazioni

Esempio n°1 Palla in caduta libera

Una palla di massa m cade da un'altezza h . determinare la velocità della palla quando giunge al suolo e quando giunge ad un'altezza y rispetto al suolo

Ragioniamo insieme - Considereremo come sistema la palla e la Terra. Adottiamo il modello semplificato secondo cui la palla non incontra la resistenza dell'aria. Quindi la palla e la Terra non subiscono altre forze da parte dell'ambiente e noi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Inizialmente il sistema ha energia potenziale e non ha energia cinetica (infatti la pallina all'inizio è ferma). Mentre la palla cade, l'energia meccanica totale del sistema (la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale) rimane costante ed è uguale alla sua energia potenziale iniziale. L'energia potenziale del sistema diminuisce e l'energia cinetica aumenta

Soluzione

Scriviamo l'equazione di conservazione dell'energia meccanica

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Nell'equazione, $K_i = 0$ perché la palla inizialmente è ferma mentre l'energia potenziale è $U_i = mgh$.

Quando la palla si trova ad un'altezza y rispetto al suolo, la sua energia cinetica sarà $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ mentre l'energia potenziale del sistema è $U_f = mgy$

Pertanto:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy = 0 + mgh$$

Da cui

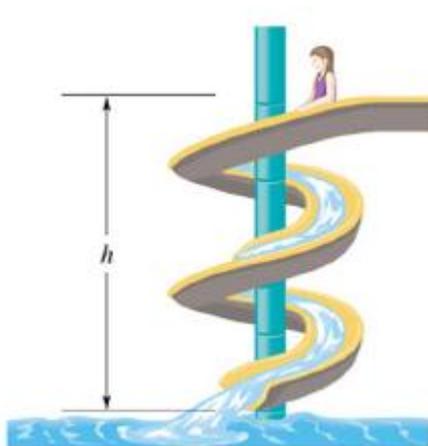
$$v_f = \sqrt{2g \cdot (h - y)}$$

Se la palla arriva al suolo, la sua velocità finale sarà data invece dalla relazione

$$v_f = \sqrt{2g \cdot h}$$

Esempio svolto n°2

Un bambino di massa m è lasciato andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo tridimensionale, a un'altezza $h = 8.5$ m, sopra il livello della piscina. A che velocità starà scivolando quando arriva in acqua? Si supponga lo scivolo privo di attrito.



Ragioniamo insieme - non posso trovare la velocità finale del bambino attraverso la sua accelerazione ($F=ma$) perché non conosco la pendenza dello scivolo. Posso applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica, infatti ho un sistema isolato e forze conservative.

Soluzione:

dal teorema di conservazione dell'energia meccanica sappiamo che

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

da cui

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(y_i - y_f)$$

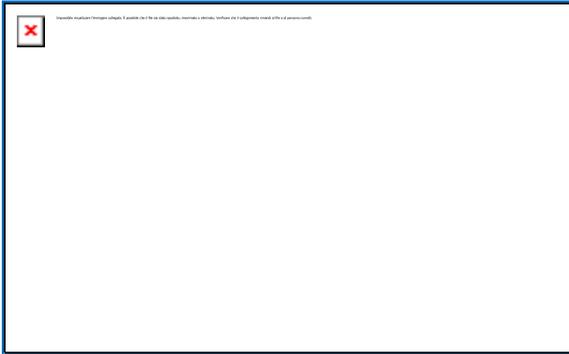
Tenuto conto che la velocità iniziale è nulla perché il bambino parte da fermo, e indicato con $h = y_i - y_f$, si ricava

$$v_f = \sqrt{2g \cdot h}$$

Da cui, sostituendo i valori, otteniamo

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 8,5} = 13 \text{ m/s}$$

Esempio svolto n°3 (ATTENZIONE c'è l'attrito quindi non vale la conservazione dell'energia)



Una cassa di 3Kg scivola giù lungo una rampa di carico. La rampa è lunga 1 metro e inclinata di un angolo di 30° come in figura. La cassa parte da ferma dalla sommità e subisce una forza di attrito costante di 5N. determinare la velocità della cassa proprio mentre raggiunge la base della rampa.

Ragioniamo insieme – definiamo la cassa, la Terra e la rampa come il nostro sistema. Esso è un sistema isolato. Se scegliessimo la cassa e la Terra come sistema, Dovremmo usare il modello del sistema non isolato perché la forza di attrito tra la cassa e la rampa è un'influenza esterna.

Soluzione

Poiché per la cassa $v_i = 0$, l'energia cinetica iniziale del sistema è zero. Se la coordinata y è misurata dal fondo della rampa, allora $y_i = 1 \text{ m} \cdot \sin\theta = 0,5 \text{ m}$ per la cassa.

Quindi, l'energia meccanica totale del sistema cassa-Terra quando la cassa si trova alla sommità della rampa è tutta energia potenziale gravitazionale

$$E_i = U_i = mgy_i$$

Quando la cassa raggiunge la base, l'energia potenziale gravitazionale del sistema è zero poiché la quota della cassa è $y_f = 0$

Quindi l'energia meccanica totale quando la cassa si trova alla base è tutta quanta energia cinetica:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Tuttavia non possiamo dire in questo caso che $E_f = E_i$ poiché agisce una forza non conservativa che è la forza di attrito che sottrae energia meccanica al sistema.

In questo caso la variazione di energia meccanica del sistema è

$$\Delta E = -f_d \cdot \Delta r$$

Dove Δr è lo spostamento della cassa lungo la rampa

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = -f_d \cdot \Delta r$$

Nel nostro caso avremo:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i = -f_d \cdot \Delta r$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgy_i - f_d \cdot \Delta r$$

di qui possiamo ricavare la velocità finale che è pari a 2,54m/s (fare i calcoli)

Ora tocca a te

ESERCIZIO

Usare la seconda legge di Newton per calcolare l'accelerazione della cassa sulla rampa, e le equazioni della cinematica per determinare la velocità finale della cassa.

Risposta 3.23 m/s; 2 2.54 m/s

ESERCIZIO

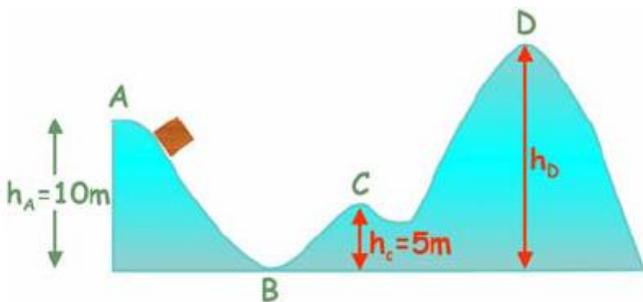
Se si considera la rampa priva di attrito, trovare la velocità finale della cassa e la sua accelerazione sulla rampa.

Risposta 3.13 m/s; 4.90 m/s²

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO N°1

Nella figura è rappresentato un punto materiale di massa 1Kg che percorre la traiettoria ABCD senza attrito. Passa per il punto A con velocità v ; per il punto B con una velocità tripla e alla fine si ferma in D.



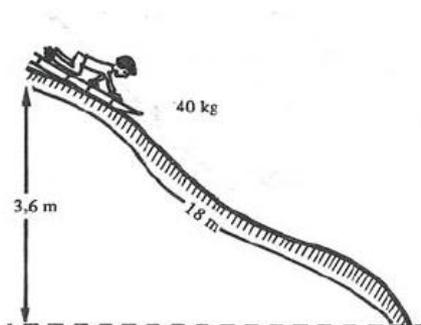
Calcolare:

- il modulo della velocità con cui il punto materiale passa per A
- L'energia cinetica nel punto C
- L'altezza del punto D, dove si ferma.

ESERCIZIO N°2

Un bambino si lascia andare da uno scivolo su uno slittino partendo da fermo e da un'altezza $h=3,6\text{m}$. la massa del bambino e dello slittino è nel complesso 40Kg . Se giunge alla fine del tratto con una velocità di $11,3\text{ m/s}$, si calcoli, applicando i teoremi di conservazione dell'energia:

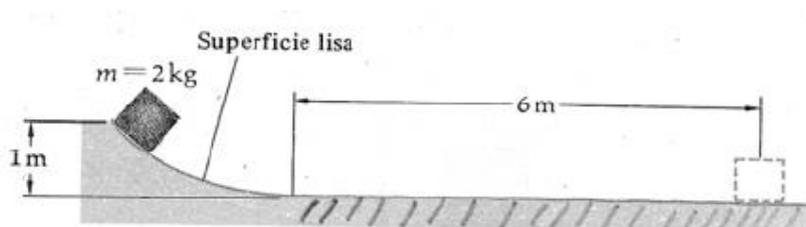
- il lavoro della forza di attrito
- supponendo il tratto di lunghezza $l=18\text{m}$, l'intensità della forza di attrito



ESERCIZIO N°3

Un blocco di massa 2Kg da una altezza di 1m , inizialmente fermo, viene abbandonato su una rampa liscia e curva come mostrato in figura. Di seguito si muove su una superficie orizzontale scabra per 6 metri prima di fermarsi.

- calcola la sua velocità nel punto più basso della rampa
- calcola il lavoro della forza di attrito
- calcola il coefficiente di attrito tra il blocco e la superficie orizzontale



ESERCIZIO N°4**ESERCIZIO N°5**

Una pallina da ping-pong ($m = 30 \text{ g}$) è lanciata verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 15 \text{ m/s}$ e raggiunge l'altezza $h = 7,5 \text{ m}$. Quanta energia è stata dissipata per effetto dell'attrito dell'aria? ($\Delta E = -1,17 \text{ J}$)

ESERCIZIO N°6

Una ragazza trascina una scatola che pesa 40 N a velocità costante per una distanza di 10 m sul pavimento. Quanto lavoro compie se il coefficiente di attrito cinetico vale $0,2$? ($W = 80 \text{ J}$)

ESERCIZIO N°7

Un bambino su un'altalena raggiunge un'altezza massima di 2 m al di sopra della sua posizione più bassa. Qual è la velocità dell'altalena nel punto più basso? (si trascurino le forze di attrito) ($v = 6,2 \text{ m/s}$)

ESERCIZIO N°8

Una lattina di birra viene fatta cadere da una finestra alta 30 m dal livello del suolo. Trascurando la resistenza dell'aria, qual è la sua velocità quando tocca il suolo? ($v = 24,2 \text{ m/s}$)

ESERCIZIO N°9

Una scatola con una velocità iniziale di 3 m/s scivola sul pavimento orizzontale e si ferma in $0,5 \text{ m}$. Qual è il coefficiente di attrito cinetico? ($\mu = 0,91$)

ESERCIZIO N°10

Una slitta di massa $m = 9 \text{ kg}$ scivola per 100 m giù da una collina che ha pendenza di 30° gradi rispetto alla direzione orizzontale. La slitta raggiunge una velocità finale di 20 ms^{-1} alla base della discesa. Quanta energia è stata dissipata a causa dell'attrito? ($\Delta E = 2615 \text{ J}$)

ESERCIZIO N°11

Un sasso viene lanciato in direzione orizzontale dalla cima di una torre con velocità iniziale di 1 m/s e arriva a terra dopo 4 s .

- Quanto vale la velocità del sasso (in modulo direzione e verso) quando sta per toccare il suolo?
- Quanto è alta la torre?
- A quale distanza dalla torre tocca terra?

ESERCIZIO N°12

Un corpo avente una massa di 3 kg μ e poggiato su un piano inclinato e vi scivola sopra con attrito trascurabile. La lunghezza del piano μ e uguale a 3m e la differenza di altezza fra le due estremità del piano è di 150 cm.

- Con quale velocità il corpo arriva in fondo se parte da fermo dall'inizio del piano?
- Quanto lavoro ha fatto la forza di gravità sul corpo durante la discesa?
- Quanto vale la forza che fa muovere il corpo lungo il piano?
- Quanto tempo impiega il corpo a scendere?

R: a) $v_f = 5,4 \text{ m/s}$; b) $L = 44,1 \text{ J}$; c) $F = 14,7 \text{ N}$; d) $t = 1,1 \text{ s}$

ESERCIZIO N°13

La pista di una montagna russa ha la forma mostrata nella figura. Un carrello di massa 200 g arriva nel punto A con la velocità di 2 m/s. Le altezze dei quattro piloni sono: $h_A = 6 \text{ m}$, $h_B = 3 \text{ m}$, $h_C = 4 \text{ m}$, $h_D = 6 \text{ m}$. Supponi che l'attrito sia trascurabile e che l'energia meccanica si conservi. Calcola l'energia cinetica, potenziale e meccanica nei quattro punti. Calcola la velocità del carrello nei punti B e D.

**ESERCIZIO N°14**

Una forza F costante e pari a 1N agisce su un corpo che si sposta di 1m lungo una direzione (non necessariamente parallela alla forza). L'energia cinetica del corpo passa da 3 J a 2 J

- Quanto vale la variazione di energia cinetica del corpo e quanto vale il lavoro compiuto dalla forza su di esso?
- Quale μ e la direzione relativa della forza e dello spostamento?

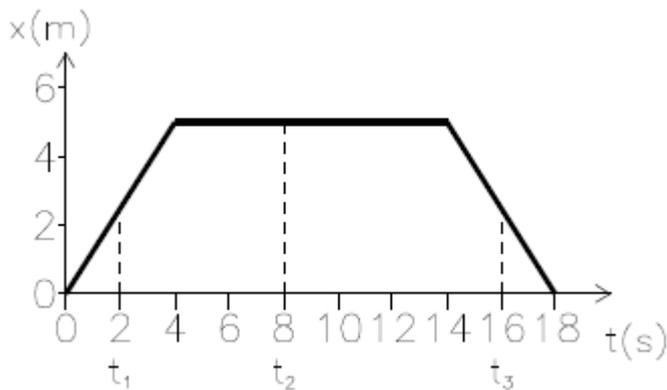
Ris.: a) $\Delta E = -1 \text{ J}$; $L = -1 \text{ J}$; b) Antiparallela.

ESERCIZIO N°15

Un corpo di massa $m = 200 \text{ g}$ viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale pari a 4 m/s.

- Quanto vale la sua energia cinetica iniziale?
- Quanto vale l'energia potenziale gravitazionale (rispetto al suolo) nel punto pi μ alto della traiettoria?
- Quale altezza massima raggiunge?

R: a) $E_{cin} = 1,6 \text{ J}$; b) $E_{pot} = 1,6 \text{ J}$; c) $h = 81,6 \text{ cm}$

ESERCIZIO N°16

Un corpo C di massa $m = 50$ g, che può muoversi solo lungo una linea retta coincidente con l'asse x , ha una posizione che cambia nel modo indicato in figura

- Quanto valgono le velocità v_1 , v_2 e v_3 (se ne chiede il valore ed il segno) in corrispondenza dei tempi t_1 , t_2 e t_3 ?
- Quale lavoro deve essere fatto (da forze opportune) tra il tempo t_1 ed il tempo t_2 (L_{12}) e tra il tempo t_1 ed il tempo t_3 (L_{13})?

R: a) $v_1 = 1,25$ m/s; $v_2 = 0$; $v_3 = -1,25$ m/s; b) $L_{12} = -0,039$ J; $L_{13} = 0$

ESERCIZIO N°17

Un blocco di massa $M = 6$ kg partendo da fermo scivola per una distanza di 4m lungo un piano inclinato di 60° rispetto alla verticale. Calcolare:

- L'energia potenziale iniziale del blocco rispetto alla base del piano inclinato
- La velocità che possiede il blocco alla fine del piano inclinato, assumendo che questo sia privo di attrito
- La velocità finale e il tempo impiegato dal blocco a raggiungere il pavimento nel caso sia presente una forza di attrito costante $F_a = 8$ N

R: a) $E_{pot} = 117,6$ J; b) $v = 6,26$ m/s; c) $v = 5,34$ m/s

Paulo difficiliora**ESERCIZIO N°18**

Una rana saltando verso l'alto può in grado di decollare dal terreno con una velocità v , pari a 250 cm/s

- A quale altezza h può arrivare la rana saltando verticalmente?

La rana di cui sopra va a camminare su un sasso che si trova in bilico sul ciglio di un burrone e, ad un certo istante, il sasso si sbilancia e comincia a cadere trascinando con se la rana.

- Se la rana spicca un salto verso il ciglio del burrone dopo un tempo $t = 0/15$ s dall'inizio del moto di caduta del sasso, ha la possibilità di salvarsi ritornando sul ciglio del burrone?

R: a) $h = 32$ cm; b) no