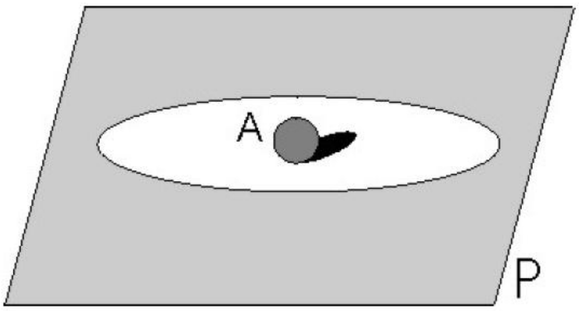
I vettori

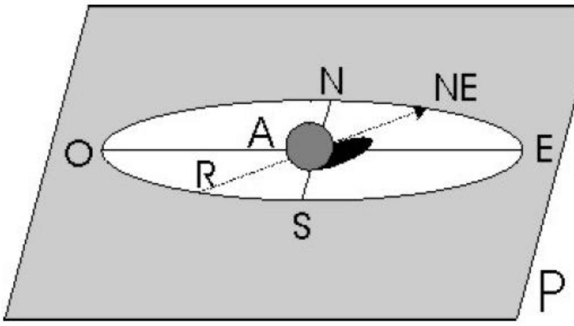
Introduzione


Quando ci riferiamo alle grandezze fisiche ci troviamo di fronte a due grandi classi. Alcune grandezze fisiche sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura espressa attraverso un numero e la rispettiva unità di misura.
Esempio: Domenica sono andato in bicicletta per due ore…
Esprimo la grandezza fisica tempo definendola attraverso il numero 2 e l'unità di misura ora.
Il tempo è un esempio di quantità scalare: sono sufficienti un numero e la rispettiva unità di misura per caratterizzarlo completamente. Quindi l' informazione sul tempo è completa.
Se invece dico: Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…
L'informazione sullo spostamento è incompleta; infatti ne conosco solo l'entità.
Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Benevento… Ho aggiunto informazione sulla mia **direzione**.
Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Benevento verso Benevento ….
Questo dato completa l'informazione sul **verso** del mio spostamento.
Nella prima categoria rientrano grandezze come la lunghezza, l'area, il volume, il tempo, la temperatura, il calore specifico, l'energia: queste grandezze vengono dette grandezze scalari. Lo spostamento rientra invece tra le grandezze cosiddette vettoriali: per definire tali grandezze univocamente è necessario fornire un modulo o intensità, una direzione e un verso.
La somma e il prodotto di grandezze scalari sono ancora uno scalare e, in generale, ogni operazione algebrica riguardante grandezze scalari produce ancora uno scalare.

Supponiamo di voler definire con precisione la posizione finale raggiunta da una sferetta disposta inizialmente nel punto *A* del piano π

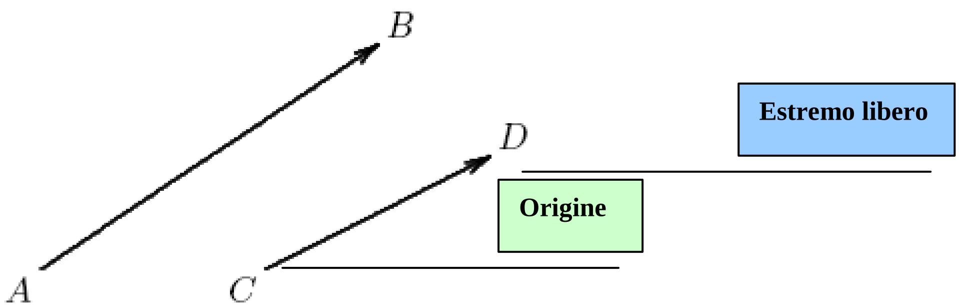


E’ evidente che se diciamo che il suo spostamento è pari ad 1 metro, l'affermazione non ci permette di individuare univocamente la posizione in quanto questa può trovarsi in un punto qualsiasi della circonferenza di centro *A* e raggio 1 m.
Dobbiamo pertanto aggiungere delle altre informazioni, in particolare quelle legate alla nozione geometrica di direzione. Tracciata quindi una retta *r* per *A*, così da rappresentare la *direzione* di moto, potremo ora individuare due punti, definiti dalle intersezioni della circonferenza con tale retta



La posizione definitiva non è ancora descritta adeguatamente e solo se aggiungiamo in quale *verso* si percorre tale retta la posizione finale *B* viene univocamente determinata. Cos se associamo al piano un sistema di assi cartesiani ortogonali (sulle carte geografiche questi assi si identificano con le direzioni Nord/Sud ed Est/Ovest), *B* sarà individuato dalle seguenti 3 affermazioni:
1. distanza da *A*: *d* = 1 m,
2. direzione individuata dalla retta *r*,
3. verso: Nord/Est.
I 3 enunciati sopra costituiscono gli elementi di base per la definizione di una nuova entità, il *vettore spostamento* della sferetta *A*, grandezza che sinteticamente vuole riassumere il contenuto informativo delle 3 affermazioni.

I vettori sono elementi astratti che possono però essere rappresentati nel piano e nello spazio attraverso segmenti orientati la cui lunghezza e direzione sono proporzionali a quelle dei vettori rappresentati.



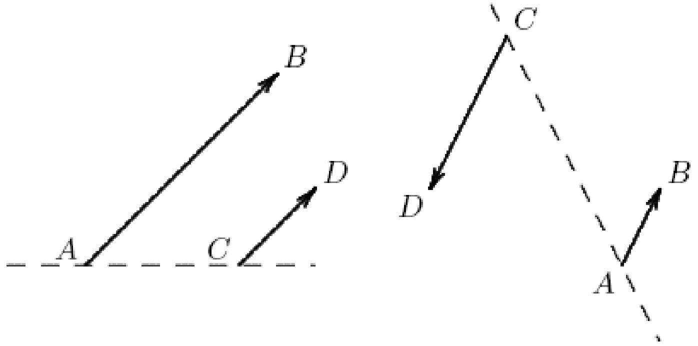
Scelta un'unità di misura, ad ogni segmento [AB] si può associare un numero reale non negativo AB, la misura della lunghezza di [AB], che rappresenta il modulo o intensità del vettore.
Il passo successivo consiste nel definire un segmento orientato come quel segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale.

A tal fine si sceglie il simbolo $\overrightarrow{AB}$ convenendo di considerare A come il punto iniziale e B come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da A e giunge in B.

Il simbolo $\overrightarrow{BA}$ individua il segmento orientato opposto ad $\overrightarrow{AB}$ e si pone $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ La (misura della) lunghezza di entrambi è ancora la medesima, AB = BA, e risulta un numero positivo se A $\neq$ B mentre è nulla se A=B.

A questi nuovi enti si possono in modo del tutto naturale estendere i concetti di parallelismo e perpendicolarità. In particolare $\overrightarrow{AB}$ risulta parallelo ad una retta *r* se lo sono le rette *r* e la retta *AB* cioè *r* // *AB*. Così i segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono *collineari* (o paralleli, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$) se esiste una
linea retta *r* alla quale entrambi risultano paralleli.

Due segmenti orientati possono avere lo *stesso verso oppure* verso *opposto*



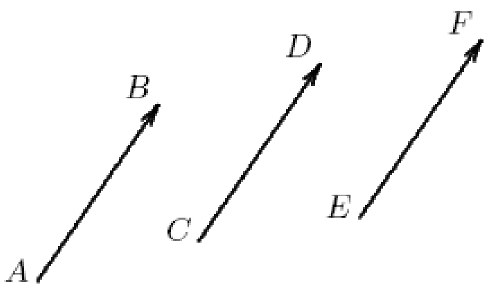
Un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ può quindi essere posto in corrispondenza con un altro segmento orientato $\overrightarrow{CD}$ per mezzo della sua

1. lunghezza,
2. collinearità,
3. verso.

Pertanto sull'insieme dei segmenti orientati del piano è possibile definire una relazione che associ $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{CD}$ se e solo se

- ✓ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$
- ✓ $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$
- ✓ $AB = CD$

Tale relazione prende il nome di relazione di equipollenza.



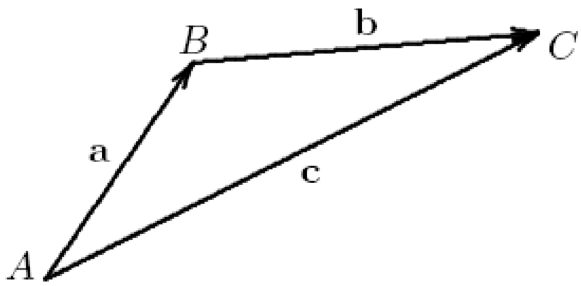
Definizione: ***Un vettore nel piano (o nello spazio) è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti, ossia di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza.***

La definizione di vettore si basa sulla costruzione di una nuova algebra diversa da quella dei numeri (che viene utilizzata per le grandezze scalari) nella quale vengono definite le operazioni che coinvolgono questa nuova entità.
Alla base di tutto sta la definizione di vettore come insieme di tutti i segmenti orientati dotati della stessa lunghezza, direzione e verso. Per questa ragione si dice che *i vettori si possono trasportare nello spazio rimanendo paralleli a se stessi*.
Quando poi si passa dalla matematica alla fisica si scopre che esistono vettori che si possono tranquillamente spostare (vettori non applicati) e vettori che invece non si possono trasportare (vettori applicati).
Avere dato una rappresentazione del vettore non è però sufficiente a definirlo; *fanno parte integrante della definizione anche le operazioni tra vettori*. In altri termini saremo autorizzati ad affermare che una certa grandezza fisica definita operativamente è un vettore se tale grandezza, oltre che essere dotata di una direzione verso e **intensità, si** comporta nella sovrapposizione fisica rispettando le regole di calcolo del *calcolo vettoriale*

Operazioni con i vettori

Somma e sottrazione di vettori

Dati due vettori è naturale definire delle operazioni tra essi in modo da associare a ciascuna coppia un altro vettore. Prendendo spunto da una situazione fisica, consideriamo una particella che inizialmente si sposti da un punto A al punto B. Tale spostamento è rappresentato dal vettore a.



Successivamente la particella si muove da *B* a *C* e questo ulteriore spostamento viene rappresentato da b. Lo spostamento complessivo è dato dal nuovo vettore c. Quest'ultimo è quello che si definisce vettore somma di a e b.

Definizione ***La somma di due vettori* a *e* b *è un vettore* c = a+b *la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente: si fissa il vettore* a *e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore* b. *Il vettore che unisce l'origine di* a *con l'estremo di* b *fornisce la somma* c = a + b.**

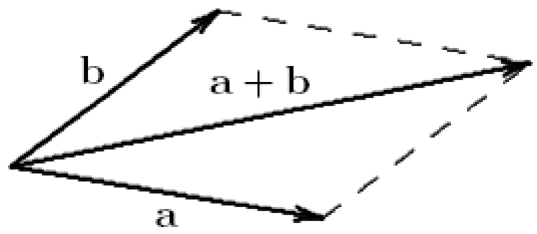
la **somma vettoriale** corrisponde a mettere i segmenti uno dietro l'altro (**metodo punta coda**)

Questa definizione, detta *regola del triangolo* si può generalizzare in modo del tutto intuitivo ad una somma di più vettori.

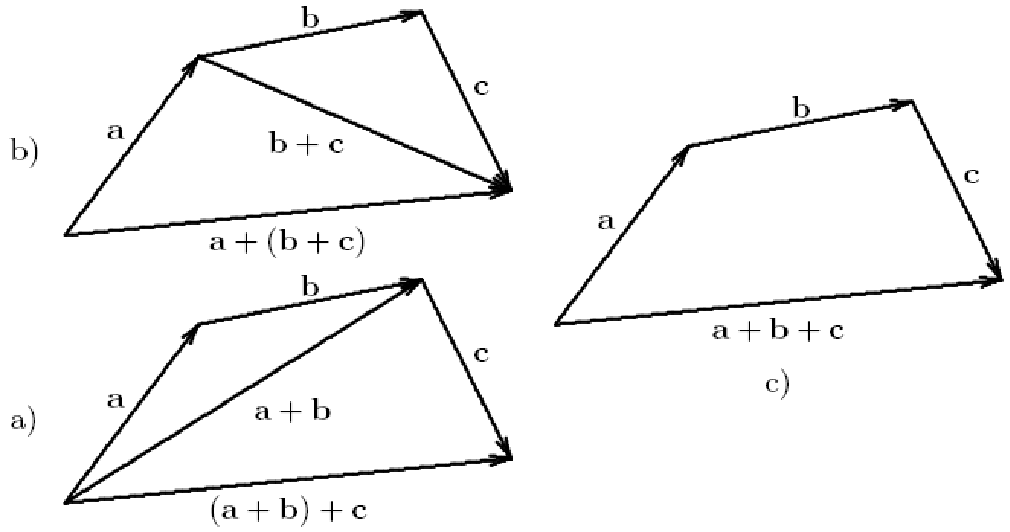
Dalla definizione si deducono facilmente le seguenti proprietà:

Prop. commutativa: **a + b = b + a**
Prop. associativa: **(a + b) + c = a + (b + c)**
Elemento neutro: **a + 0 = a**

In particolare dalla proprietà commutativa discende una definizione alternativa della somma (o risultante) di due vettori ossia la *regola del parallelogramma*.
Questa consiste nell'individuare il vettore somma di *due vettori non collineari* come il vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito per mezzo dei segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune



Diamo qui alcuni esemplificazioni grafiche dei metodi appena presentati.
Siano a, b, c tre vettori qualsiasi. Per determinare la loro risultante a + b + c possiamo procedere in diversi modi. Tramite la regola del triangolo, riscritta la loro somma in forma alternativa per mezzo della proprietà
associativa a+b+c = (a+b)+c, si procede costruendo dapprima il vettore (a + b) e quindi il vettore risultante lo si somma a c.
Un'alternativa meno laboriosa e più efficace nel caso che i vettori siano numerosi, consiste nel traslare i diversi vettori in modo che l'origine di ognuno coincida con l'estremo del precedente (*regola del poligono*). Il vettore risultante si ottiene quindi unendo l'origine del primo con l'estremo dell'ultimo



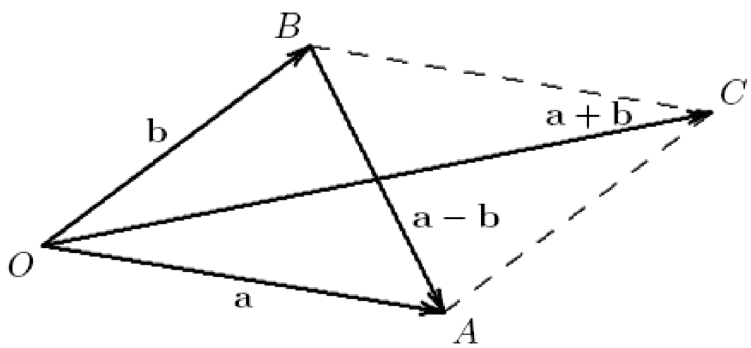
Definizione ***La differenza* a-b *di due vettori è la somma del vettore* a *con l'opposto del vettore* b *ossia* a - b = a + (- b)**

sottrazione vettoriale

è definita come operazione inversa della addizione:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

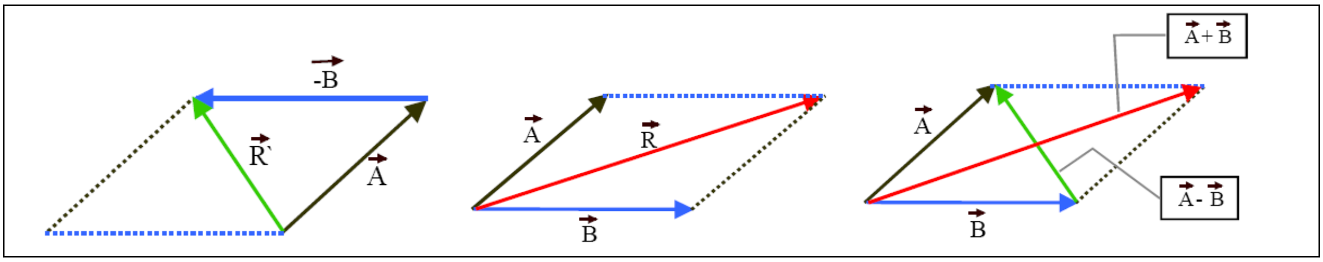
Va notato che se, sulla base di a e di b disposti con la medesima origine *O*, si costruisce un parallelogramma , allora la lunghezza della diagonale uscente da *O* esprime la lunghezza di a + b mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore a - b:



N.B.

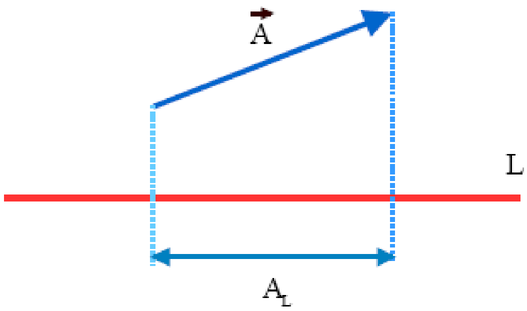
1 + 1 fa da 0 a 2 a seconda della direzione degli addendi

Due vettori di lunghezza unitaria producono, quando hanno la stessa direzione e lo stesso verso, un vettore di lunghezza 2 mentre ne producono uno di lunghezza nulla quando hanno verso contrario. Ci sono poi tutte le infinite situazioni intermedie che si verificano quando le direzioni sono diverse.

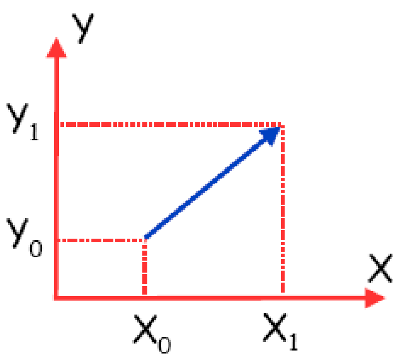


I vettori attraverso le coordinate cartesiane

La proiezione ortogonale di un vettore su una retta orientata è una quantità scalare che chiameremo componente del vettore. Tale componente è la lunghezza del segmento compreso tra le proiezioni sulla retta rispettivamente dell'origine e dell'estremo libero del vettore stesso.



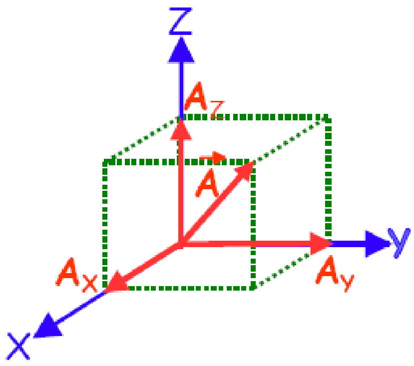
Analogamente al caso monodimensionale, un vettore può essere rappresentato in un piano cartesiano, ovvero un piano suddiviso da due rette ortogonali, risp. asse delle ascisse e asse delle ordinate, in quattro quadranti



Proiettando l'origine e l'estremo libero del vettore sugli assi cartesiani si ottengono in corrispondenza i punti x_0 e x_1 sull'asse delle ascisse, y_0 e y_1 sull'asse delle ordinate. Il segmento

$x_1 - x_0$ rappresenta la proiezione del vettore sull'asse delle *x* mentre il segmento $y_1 - y_0$ rappresenta la proiezione del vettore sull'asse delle *y.*

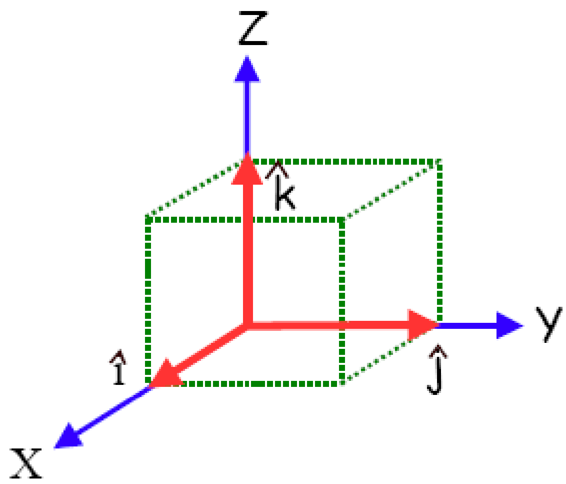
Analogamente possiamo individuare un vettore nello spazio. In questo caso dobbiamo considerare tre componenti, aggiungendo un terzo asse che chiamiamo asse Z o asse delle quote.



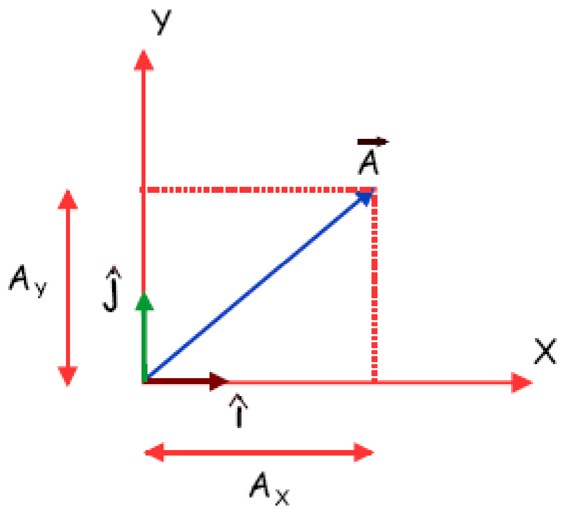
Nello spazio vengono individuati tre piani XY, XZ, YZ; pertanto un vettore A potrà essere individuato nello spazio mediante tre componenti A_x, A_y, A_z .

Vettori unitari nel piano e nello spazio

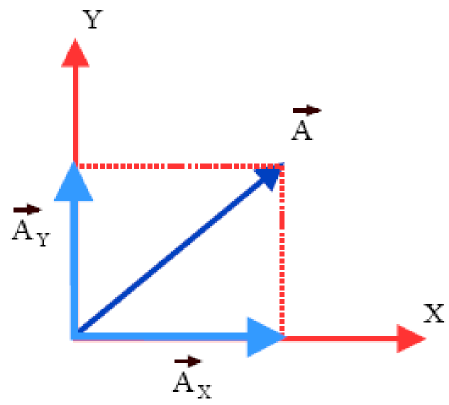
E' utili introdurre la nozione di versore.
Il versore è un vettore che ha modulo unitario ed ha la direzione e il verso dei semiassi positivi del piano cartesiano. Per convenzione il vettore unitario che ha la direzione e il verso dell'asse X positivo si indica con $\hat{i}$, mentre il vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse Y lo si indicherà con $\hat{j}$. Nello spazio dovendo introdurre l'asse delle quote, al vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse positivo delle Z daremo il simbolo $\hat{k}$. La situazione è rappresentata in figura.



Abbiamo ora gli strumenti per lavorare con i vettori prescindendo dalla rappresentazione grafica facendo anche calcoli analitici.
Consideriamo un vettore libero nel piano XY considerando che la sua origine coincide con l'origine del piano cartesiano, rappresentiamo le sue componenti cartesiane e i versori.



La componente del vettore lungo l'asse x ha modulo A_x, la direzione e il verso sono quelli del versore $\hat{\imath}$, mentre la componente lungo l'asse y ha modulo A_y, direzione e verso coincidenti con quelli del versore $\hat{j}$



Così risulta chiaro che

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y}$$

Se teniamo, inoltre, presente la definizione di versore:

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{A_x}}{A_x} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A_x} = A_x \hat{\imath}$$

$$\hat{j} = \frac{\vec{A_y}}{A_y} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A_y} = A_y \hat{j}$$

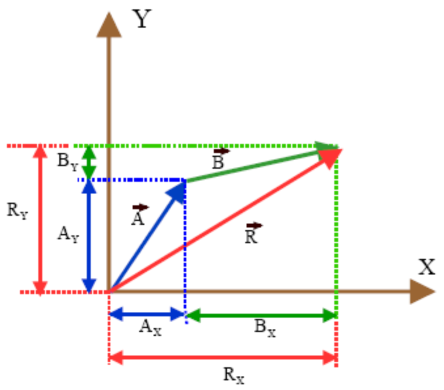
Allora il vettore $\vec{A}$ si può scrivere come

$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}}$ che prende il nome di **rappresentazione cartesiana** di un vettore

Se il vettore deve essere rappresentato nello spazio avremo

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

Siccome i vettori A e B sono vettori liberi essi possono essere traslati in modo tale l'estremo libero di A coincida con l'origine di B e la somma o risultante di entrambi si ottiene graficamente unendo l'origine di A con l'estremo libero di B



Allora le componenti di R sono la somma aritmetica delle componenti dei vettori A e B

$R_x = A_x + B_x$

$R_y = A_y + B_y$

Per cui

$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$

Pertanto la risultante di due o più vettori ha per componenti la somma delle componenti omologhe dei singoli vettori

Viceversa, se si conoscono le componenti cartesiane di un vettore e vogliamo conoscere il suo modulo bisogna tener presente la seguente

Proprietà delle componenti cartesiane. ***Le componenti del vettore AB rispetto ai versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$ che costituiscono la base $\{\hat{i};\hat{j}\}$ si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo B con quelle del punto iniziale A, ossia, applicandoli teorema di Pitagora:***

AB= $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Esercizio svolto

Dati i seguenti vettori $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ calcolare i vettori

- A+B
- A-B
- 2A

Soluzione

- A+B=(3+1)$\hat{i}$ +(4+3) $\hat{j}$ +(2-5)$\hat{k}$
  A+B= $4\hat{i} + 7\,\hat{j} - 3\hat{k}$

- A-B=A+(-B)=(3-1) $\hat{i}$ +(4-3) $\hat{j}$ +(2+5) $\hat{k}$
  A-B= $2\hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$

- 2A = $6\hat{i} + 8\,\hat{j} + 4\hat{k}$

Esercizio
Determinare le coordinate del vettore 4a - 5b *sapendo che risulta* a = (2*;* 6*;* 1) *e* b = (-2*;* 3*;*-3). *Si trovi successivamente il suo modulo.*

Esercizio
Sono assegnati i vettori a = (3*x;* 2*;* 1) *e* b = (2*y;* 1*;-y*). *Determinare x e y in modo che* a sia parallelo a b

Esercizio
Dato il punto A(-3*;* 6) *e il vettore* a = (5*;* 4). *Trovare le coordinate di B tale che sia* a = *AB*

Esercizio
I punti A(9*;* 5*;* 3) *e B*(-2*;* 7*;* 3) *definiscono il vettore AB. Si determinino le componenti del versore* e, *opposto ad AB*

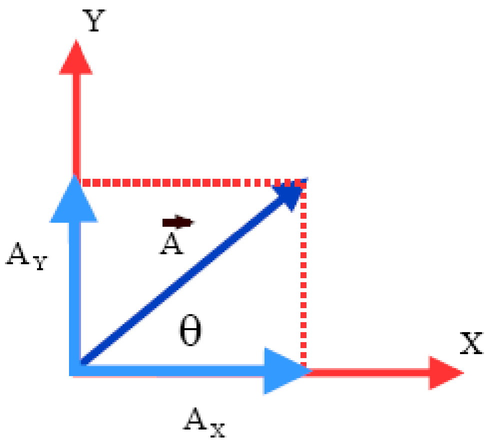
Esercizio
Sia ABC un triangolo avente le coordinate dei vertici note. Determinare le coordinate del suo baricentro ossia del punto d'incontro delle mediane ai 3 lati.

Esercizio
I vettori a = *OA e* b = *OB sono espressi dalle* a = 4i-3j *e* b = -7i + 8j. *Determinare la rappresentazione cartesiana di AB.*

Esercizio
Dati i vettori $a \equiv \{2,-1\}$ *e* $b \equiv \{-1,3\}$ *determinare graficamente ed analiticamente il vettore somma* $s = a + b$ *e il vettore differenza* $d = a - b$

Scomposizione di un vettore

Fino ad ora abbiamo imparato a determinare le componenti di un vettore per via grafica eseguendo delle proiezioni su una o più rette. Esiste però un metodo, basato sull'utilizzo delle funzioni goniometriche , che consente di determinare le componenti quando sono noti il modulo e l'angolo e viceversa.



Noto l'angolo θ e il modulo del vettore A indicato in figura è possibile ricavare le componenti cartesiane A_x e A_y. Per fare ciò ricorriamo ai teoremi sui triangoli rettangoli con cui si familiarizzerà negli studi successivi.

- ✓ In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto ad esso;
- ✓ In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente ad esso.

In base a questi due teoremi è facile ricavare le componenti cartesiane del vettore A:

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$

Valgono, inoltre, i seguenti altri due teoremi:

- ✓ In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto ad esso;
- ✓ In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente ad esso

Pertanto se conosciamo le componenti cartesiane di un vettore possiamo facilmente ricavare il suo modulo e l'angolo ricorrendo alle seguenti relazioni:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$A_y = A_x \cdot tg\,\theta \qquad \Rightarrow \qquad tg\,\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = arctg\,\frac{A_y}{A_x}$$

Esercizio

Sono assegnati i vettori *a* e *b* con le seguenti caratteristiche: |*a*| = 6.4; α° =45°; |*b* | = 6.9; β° = –74°. Calcolare il modulo e l'angolo del vettore *c* somma (risultati con almeno 4 cifre decimali)

Soluzione

$a_x = a \cos \alpha = 6.4 \cos 45° = 4.5255$

$a_y = a \sin \alpha = 4.5255$

analogamente

$b_x = b \cos \beta = 6.9 \cos -74° = 1.9019$

$b_y = b \sin \beta = -6.6327$

$c_x = a_x + b_x = 6.4274$

$c_y = a_y + b_y = -2.1072$

$|c| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 6.7640$

$\gamma = artg \dfrac{c_y}{c_x} = -18.1518°$

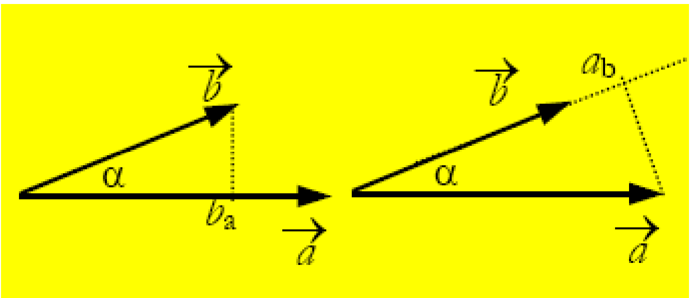
NB. Nella determinazione dell'angolo formato da un vettore bisogna tener presente che la macchina calcolatrice fornisce sempre nella inversione della tangente un angolo compreso tra –90° e +90°. Ma un vettore può essere collocato anche nel II e III quadrante. Pertanto, dopo aver determinato γ con la calcolatrice bisogna, sulla base dei singoli segni delle componenti, verificare se la soluzione da prendere non corrisponda a $\gamma + 180°$ che presenta lo stesso valore della tangente ma risulta rispettoso anche dei singoli segni delle componenti.

Prodotto tra vettori

Prodotto scalare

Dati due vettori a e b e indicato con α l'angolo formato tra essi, si chiama *prodotto scalare* (*dot product*[1]) il numero c così definito:

$$c = a \cdot b = a\, b \cos \alpha$$



Poiché moltiplicare per il coseno equivale a trovare la componente di un vettore lungo la retta rispetto a cui viene misurato l'angolo potremo anche scrivere che:

$$c = a \cdot b = a_b\, b = a\, b_a$$

[1] I due prodotti del calcolo vettoriale sono detti *dot product* e *cross product* dai simboli · e × usati per rappresentarli. Per una tradizione consolidata e che crea confusione, nella tradizione accademica italiana (e solo in quella) si usano i simboli × e ∧.

Se conosciamo la rappresentazione cartesiana dei vettori possiamo anche definire il prodotto cartesiano nel modo seguente:

Siano $a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ ***e*** $b = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ ***due vettori dello spazio espressi nella loro decomposizione cartesiana. Dicesi prodotto scalare di due vettori a e b, la somma dei prodotti delle componenti omonime (e quindi relative agli stessi assi): in simboli***

$$a \times b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Dimostrazione:
Basta osservare che, indicati con α e β gli angoli formati dai due vettori con l'asse x, l'angolo tra essi è β – α, $a \cdot b = a\, b \cos(\beta - \alpha) = a\, b (\cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha) = a_x b_x + a_y b_y$
La dimostrazione si può svolgere elegantemente anche sfruttando le proprietà dei versori e ciò equivale a dimostrare indirettamente anche la formula del coseno della differenza (lasciamo la dimostrazione come esercizio).

Altre proprietà del prodotto scalare

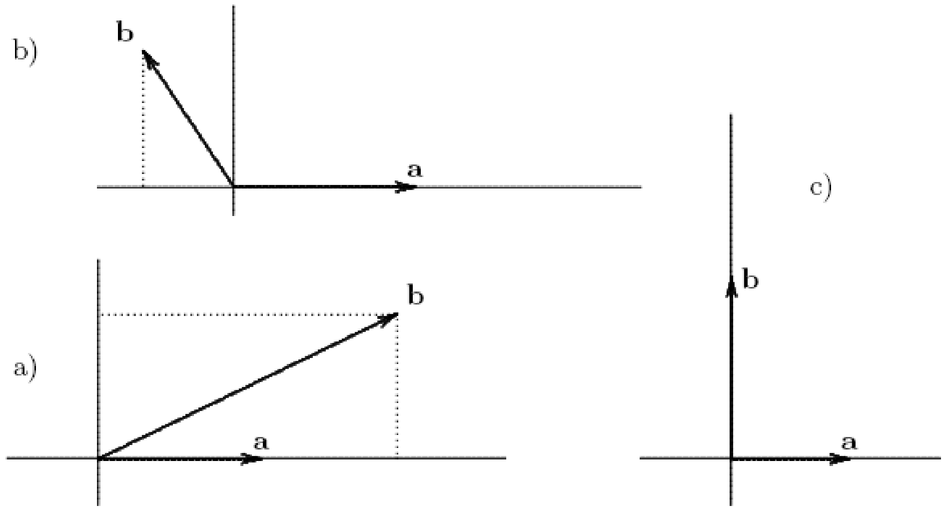
- ✓ proprietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a$

In effetti scambiando i due vettori si passa dall'angolo α all'angolo –α e il valore del coseno rimane lo stesso

- ✓ ortogonalità $a \cdot b = 0 \cdot \alpha = 90°$

Infatti, quando l'angolo vale 90°, il coseno vale 0

- ✓ $a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \hat{ab} < 90$
  $a \cdot b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 90 < \hat{ab} < 180$



- ✓ moltiplicazione per uno scalare k
  associativa $k(a \cdot b) = (k\,a) \cdot b = a \cdot (k\,b)$

- ✓ versori

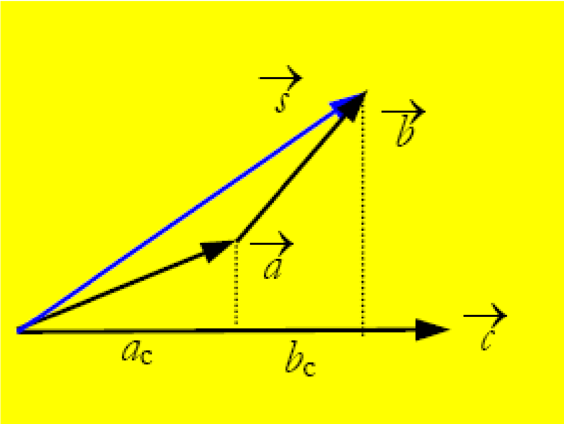
$i \cdot j = 0$

$i \cdot i = j \cdot j = 1$

- ✓ distributiva

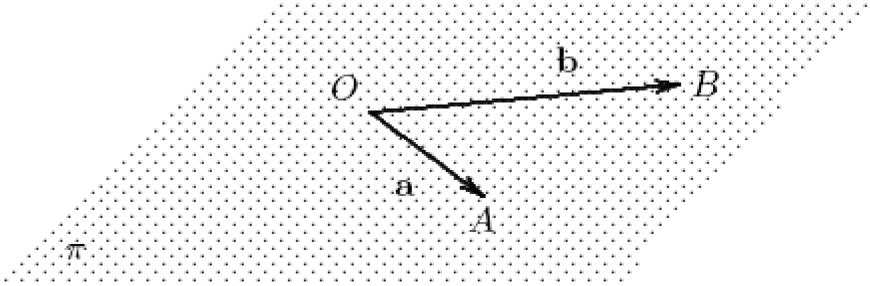
$c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$

La dimostrazione di questa proprietà si basa sul fatto che nella somma vettoriale si sommano algebricamente le componenti e la lasciamo e per esercizio al lettore che utilizzerà l'immagine qui a lato.



Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra due o più vettori ci fornisce, al contrario del prodotto scalare, un nuovo vettore di cui dobbiamo caratterizzarne il modulo, la direzione e il verso.



Dati due vettori a e b e indicato con α l'angolo formato tra essi, si chiama *prodotto vettoriale* il vettore che ha per modulo il numero c così definito:

$$c = a \times b = a\, b \sin \alpha$$

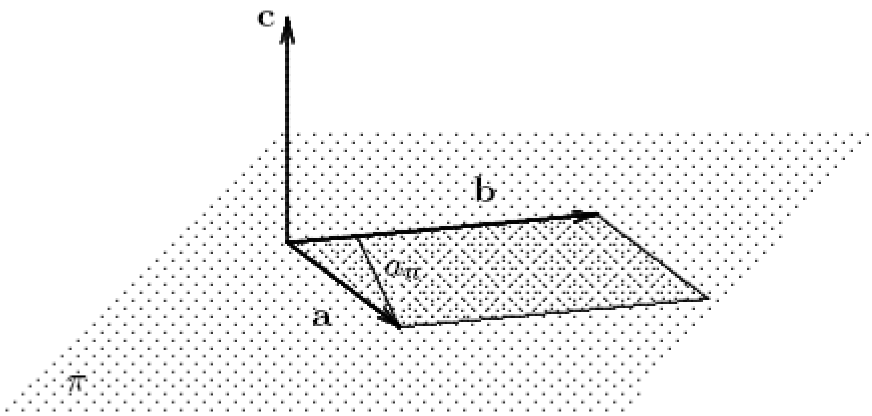
Per definire completamente il prodotto vettoriale, tuttavia, è necessario stabilire anche la direzione e il verso del nuovo vettore che si ottiene moltiplicando vettorialmente i vettori a e b.
Cominciamo col dire che i due vettori a e b individuano un piano.
Assegnare una direzione in questo piano o in un piano ad esso parallelo riesce problematico mentre è immediato associare a π una direzione ad esso perpendicolare: difatti tutte le rette perpendicolari a π possiedono la medesima direzione, univocamente determinata appena sono dati i due vettori.
Conveniamo quindi di assegnare a a $\times$ b la direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori: in tal modo si ha

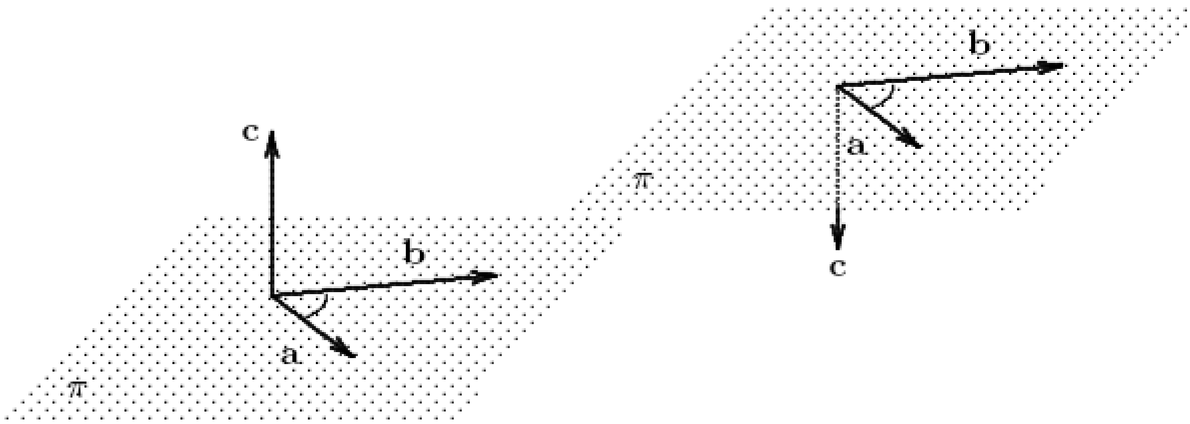
$(a \times b) \perp a$ e $(a \times b) \perp b$.

Si tratta ora di determinare il verso. A prima vista si potrebbe pensare di utilizzare le nozioni di rotazione oraria e antioraria: per esempio, il verso di $a \times b$ potrebbe essere uscente dal piano dei due vettori se la rotazione che porta il primo vettore a a sovrapporsi al secondo b attraverso l'angolo minore di 180° risultasse antioraria, o viceversa. Una tale convenzione non sarebbe comunque soddisfacente in quanto la nozione di rotazione oraria e antioraria dipende dal punto di osservazione: difatti se si osserva la rotazione
da punti appartenenti a ciascuno dei due semispazi formati dal piano π , si ottengono risultati opposti.
Prendiamo invece una comune vite avvitata su una sottile tavola di legno. Questa, solo se ruotata in un certo modo avanza, mentre per estrarla la si deve ruotare nel verso opposto. Un tale comportamento rimane immutato se si guarda dall'altro lato della tavola: ancora per farla avanzare nello stesso verso di prima bisogna ruotarla nello stesso modo.
Un tale oggetto quindi permette di associare univocamente ad un verso di rotazione un verso di avanzamento. Poiché comunque esistono viti (poche) che si comportano diversamente (le prime si dicono destrorse, queste ultime sinistrorse), conviene rifarci ad un oggetto che, per ora esiste solo nella versione “destrorsa" ed è noto a tutti: il *cavatappi*.

Possiamo quindi in definitiva proporre la regola per il verso di $a \times b$:

- $a \times b$ possiede il verso di avanzamento di un cavatappi fatto ruotare concordemente alla rotazione che sovrappone il primo vettore a sul secondo b, attraverso l'angolo convesso α < 180°





Le conseguenze di una tale posizione sono immediate: osservando la figura risulta evidente che (a× b)↑↓(b × a) e quindi che i due vettori possiedono versi opposti. Se quindi assegniamo ad essi lo stesso modulo
l'operazione che stiamo definendo e che chiameremo *prodotto vettoriale* risulterebbe anticommutativa ossia tale che a × b = - b × a.

Ci chiediamo ora quale sia la la decomposizione cartesiana di a × b: i vettori a e b siano espressi dalle

a = $a_x\,\hat{\imath}$+ $a_y\,\hat{\jmath}$+ $a_z\,\hat{k}$ b = $b_x\,\hat{\imath}$+ $b_y\,\hat{\jmath}$+ $b_z\,\hat{k}$;

Come già detto, la risposta ad una tale domanda presuppone conoscenze di goniometria non ancora acquisite, pertanto l'espressione che ne risulta verrà data senza dimostrazione: il prodotto vettoriale in termini delle componenti cartesiane di a e b, si esprime comunque come

$$c = a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

per cui le componenti di c sono

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Una tale espressione risulta difficile da memorizzare per cui si ricorre ad una scrittura formale alternativa, detta *determinante* e del tipo

$$c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Da cui le componenti si ottengono sviluppando il determinante rispetto agli elementi della prima riga

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \qquad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Abbiamo già accennato a una proprietà del prodotto vettoriale: la proprietà anticommutativa
a × b = - b × a.

Altre proprietà di cui gode il prodotto vettoriale sono:

- ✓ Proprietà associativa rispetto al fattore scalare.

$$\forall \alpha \in R \;\; \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$$

- ✓ Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Esempi e applicazioni:

- a × a = 0

Possiamo dimostrarlo seguendo due strade.

La più sintetica fa uso della proprietà anticommutativa per cui, commutando i fattori, deve essere a × a = - a × a. Ne segue che il vettore prodotto c è uguale al proprio opposto - c e ciò può essere vero solo per il vettore nullo 0.

L'altra si basa sullo sviluppo del determinante

$$c = a \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$c = a \times a = (a_y a_z - a_z a_y)\hat{\imath} + (a_z a_x - a_x a_z)\hat{\jmath} + (a_x a_y - a_y a_x)\hat{k}$= = 0i + 0j + 0k = 0

come si vede un determinante con due righe uguali si annulla.

In modo analogo a quanto svolto nel precedente esempio, dedurre che se b = αa ossia se i due fattori sono collineari, il loro prodotto vettoriale si annulla. Poiché, inoltre, vale pure l'implicazione opposta, abbiamo la possibilità di riscrivere la condizione di col linearità in modo alternativo; allora:

$$\mathrm{a} || \mathrm{b} \leftrightarrow \mathrm{a} \times \mathrm{b} = 0$$

Esercizio

Dati a = 3i - 2j - k e b = 4i + 3j + 2k calcoliamo il vettore c = a × b.

Esercizio

Assegnati a = 2i - j - 3k e b = -2i + 2j - k, calcolare (a - 3b) ^ (-2a + b).

Applicazione

La condizione di appartenenza di tre vettori a, b, c al medesimo piano π si scrive come condizione di complanarità: a, b, c $\in \pi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a · (b × c) = 0.

Esercizio

Si dica se i vettori a = (1; 0;-1), b = (-1; 1; 0), c = (2; 0;-3) sono complanari.

Esercizio

Determinare i vettori a = (x; 1; 0) e b = (y;-2; 10) in modo che questi risultino non solo mutuamente perpendicolari, ma pure complanari a c = (1; 1; 1).

Applicazione

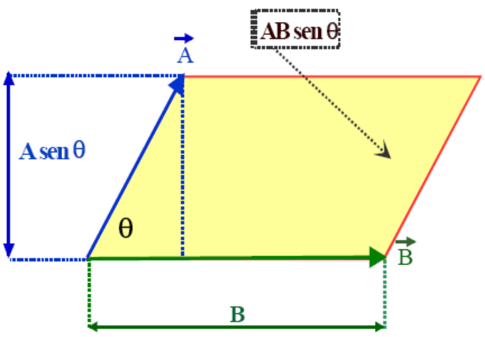
$$\hat{i} \times \hat{j} = \{(1)(1)(\text{sen}90°)\}\hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \{(1)(1)(\text{sen}90°)\}\hat{i} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \{(1)(1)(\text{sen}90°)\}\hat{j} = \hat{j}$$

Applicazione

Il modulo del prodotto vettoriale è numericamente uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori e le parallele che passano per gli estremi. Consideriamo la seguente figura che mostra due vettori che hanno la stessa origine e le parallele per essi.



L' area di questo parallelogrammo si calcola moltiplicando la base (B) per l' altezza (Asenθ): Area=BAsenθ

Esercizio svolto

Calcolare il prodotto vettoriale tra i vettori $A = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ e $B = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

Soluzione:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 3 & -5\end{vmatrix}$$

A×B=(-20-6)$\hat{\imath}$ −(−15 − 2) $\hat{\jmath}$ +(9−4)$\hat{k}$
A×B=-26$\hat{\imath}$ +17$\hat{\jmath}$ +5$\hat{k}$

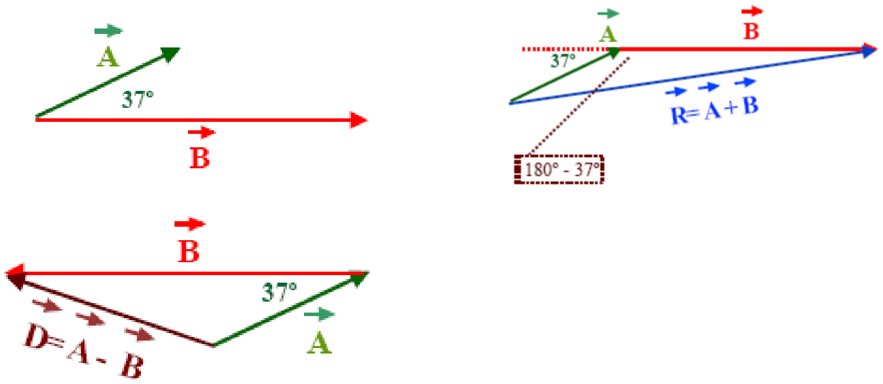
Esercizi svolti

Esercizio 1.

Due vettori A e B di modulo 3 e 5 rispettivamente, formano un angolo di 37º. Si determini analiticamente il modulo della risultante e della differenza tra i due vettori.

Soluzione

La risultante (R= A+B) così come la differenza o somma dell' opposto (D= A-B) si può vedere in forma grafica nella figura seguente:



Allora, applicando il teorema del coseno, si ha:

$R^2=A^2+B^2-2AB\cos(180º-37º)$ $R^2=9+25-2(3)(5)(-0,8)$ R=7,6

E la differenza è:

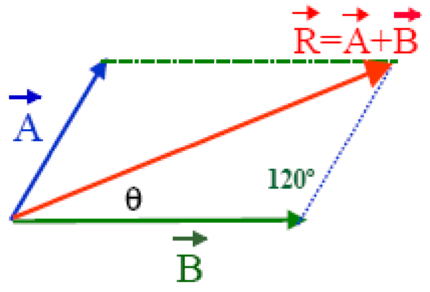
$D^2=A^2+B^2-2AB\cos(37º)$ $D^2=9+25-2(3)(5)(0,8)$ D=3,2

Esercizio 2

Calcolare il vettore risultante tra i vettori A e B di modulo rispettivamente 4 e 3 e che formano tra loro un angolo di 60°

Soluzione

Nella seguente figura si osservano i vettori e gli angoli tra essi



Il modulo della risultante si può calcolare con il teorema del coseno:

$R^2=A^2+B^2–2ABcos120º$ $R^2=14+9–2(4)(3)cos\ 120º$ $R=6,1$

L' angolo tra la risultante e il vettore A si può calcolare con il teorema del seno:

$$\frac{sen\theta}{B} = \frac{sen120°}{R}$$

$$\frac{sen\theta}{3} = \frac{0,87}{6,1}$$

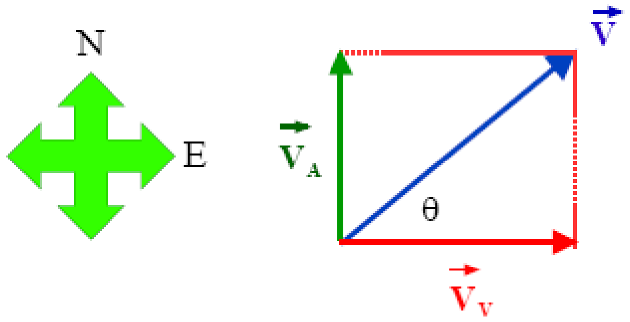
$$\theta = arcsen0,43 = 25,5°$$

Esercizio 3

Un aereo si muove verso Nord con una velocità di 30 Km/h, quando è soggetto alla azione del vento che soffia con una velocità di 40Km/h verso Est. Calcolare lo spostamento risultante dell'aereo.

Soluzione

In questo problema si ha a che fare con una grandezza vettoriale chiamata velocità. La velocità risultante sarà pertanto la somma vettoriale delle velocità relative al moto dell'aereo e la velocità del vento. Nella figura è schematizzato il problema avendo indicato con v_A la velocità dell'aereo e v_v la velocità del vento



Se schematizziamo il problema in una piano cartesiano XY, allora la velocità del vento sarà

$$v_v = 40\frac{Km}{h}\hat{\imath}$$

Mentre la velocità dell'aereo sarà

$$v_a = 30\frac{Km}{h}\hat{\jmath}$$

In questo modo, la risultante sarà

$$v = (40\hat{\imath} + 30\hat{\jmath})\frac{Km}{h}$$

Il suo modulo vale:

$v^2 = 40^2 + 30^2 \qquad \rightarrow \qquad v = 50\frac{Km}{h}$

Questa è la velocità risultante con cui si muoverà realmente l'aereo.
La direzione della velocità risultante sarà:

$$\theta = arctg\frac{v_A}{v_B} = 36{,}9°$$

da Est verso Nord

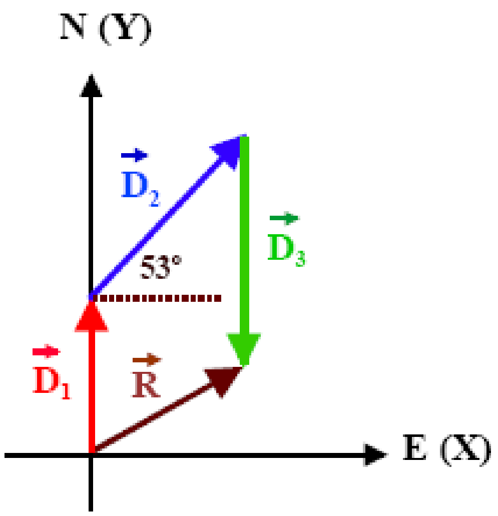
Esercizio

Un'altra grandezza fisica vettoriale è denominata spostamento.
Per spostamento si intende il vettore della posizione che unisce due punti iniziale e finale di un moto senza tener conto del cammino seguito

Supponiamo che due persone camminano nel deserto su un terreno pianeggiante e annotano su un diario il cammino seguito nel modo seguente

- I giorno: camminiamo 30Km in linea retta verso il nord senza trovare acqua
- II giorno: oggi camminiamo solo per 20Km in linea retta in direzione Nord-Est di 37°; siamo stanchissimi. Non troviamo acqua.
- III giorno: abbiamo trovato l'acqua finalmente camminando 20Km verso Sud

Ecco uno schema "vettoriale" del nostro percorso



Allora gli spostamenti giornalieri sono:

$$D_1 = 30km\hat{\jmath}$$

$$D_2 = 20cos53°\hat{\imath} + 20sen53°\hat{\jmath} \qquad D_2 = 12\hat{\imath} + 16\hat{\jmath}$$

$$D_3 = 20(-\hat{\jmath})$$

Pertanto, lo spostamento risultante è

$$R = D_1 + D_2 + D_3 = 12\hat{\imath} + 26\hat{\jmath}$$

Il suo modulo vale:

$$R^2 = 12^2 + 26^2 \rightarrow R = 28{,}6Km$$

La sua direzione è :

$$\theta = artg\frac{26}{12} = artg2{,}17 = 65{,}3°$$

In altre parole, se i nostri viaggiatori avessero saputo la posizione precisa del pozzo d'acqua avrebbero camminato solo per 28,6Km il linea retta verso Nord-Est

Esercizio

Calcolare per quale valore di a i vettori A e B risultano perpendicolari. $A = 2\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + \hat{k}$ e $B = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

Soluzione:

La condizione di perpendicolarità è che il prodotto scalare tra i due vettori sia zero:

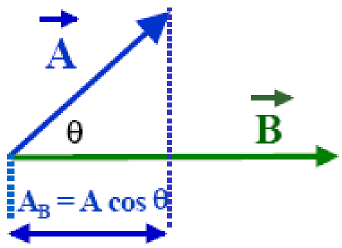
A • B =8–2a–2=0

Da cui si ottiene a = 3

Esercizio

Calcolare la direzione che il vettore A= $\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ forma rispetto al vettore B= $4\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 7\hat{k}$

Soluzione:



Dalla definizione di prodotto scalare si ottiene:

A•B= ABcosθ

Che si può anche scrivere come:

A B •B=AB

Poiché AB=Acosθ , come si osserva nella figura precedente, conseguenzialmente si ha

$$A_B = \frac{A \cdot B}{|B|} = \frac{4+6+7}{9} = 2{,}1$$

Esercizio

Dati i vettori A=2i-j B= i +k e C=j+k , determinare:
a) Un vettore unitario nella direzione del vettore A+B-3C
b) Un vettore perpendicolare al piano formato dai vettori B e C
c) l'area del parallelogrammo formato da A e B

Soluzione:

a) $\hat{u} = \frac{A+B-3C}{|A+B-3C|} = \frac{3i-4j-2k}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{3i-4j-2k}{5{,}39} \rightarrow \hat{u} = 0{,}56\hat{\imath} - 0{,}74\hat{\jmath} - 0{,}37\hat{k}$

b) $P = B \times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + k$

c) L'area è il modulo del prodotto vettoriale tra A e B, pertanto:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + k = 2{,}4$$

Esercizio

Dati I seguenti vettori: A=3i+2j+2k, B=i-3j+4k e C=2i+3j-k

a) Si determini analiticamente se A e B sono o no perpendicolari.
b) Calcolare A • (BXC)

Soluzione:

a) i due vettori A e B per essere perpendicolari devono soddisfare la condizione A•B=0
A•B=3–6+8=5
Dunque non sono perpendicolari
b) Il prodotto che andiamo ad eseguire è detto prodotto triplo o anche prodotto misto; esso geometricamente rappresenta il volume del parallelogrammo le cui dimensioni sono i vettori A, B e C. L'operazione A• (BXC) si può intendere come il prodotto scalare tra i vettori A e BXC
Pertanto:

$$B \times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -9i + 9j + 9k$$

Dunque:

A•BXC=(3ˆi+2ˆj+2kˆ)•(−9ˆi + 9ˆj + 9kˆ)

A•BXC=-27+18+18=9

Esercizio

Calcolare i seguenti prodotti:

a) 2jX3k
b) 3iX(-2k)
c) (2jXi)-3k

Soluzione:

a) 2jX3k=6i

b) 3iX$\left(\text{-2k}\right)$=(3)(-2)iXk= 6k

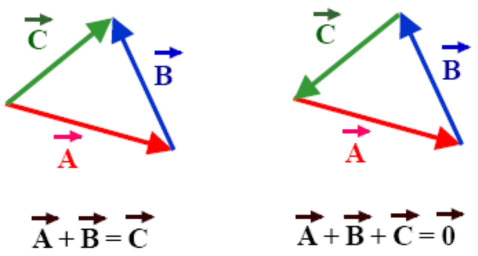
c) $\left(\text{2jXi }\right)$-3k=2$\left(\text{-k}\right)$−3k= −5k

Esercizio

Dimostrare che I vettori A=2ˆi+ˆj-4kˆ, B=ˆi-3ˆj+5kˆ e C=3ˆi-2ˆj+kˆ formano un triangolo rettangolo.

Soluzione:

Innanzitutto occorre dimostrare che formano un triangolo e ciò si ha se la somma di due di loro ci dia il terzo o, ciò che è lo stesso, se la risultante dei tre vettori sia il vettore nullo come si può vedere dalle figura seguente



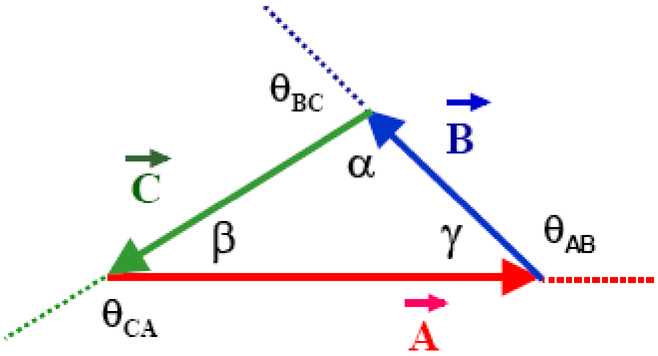
Poi bisogna far vedere che il prodotto scalare tra due di essi sia nullo.
Nel nostro caso, A+B=C
Per cui i tre vettori formano un triangolo e A•C =6–2–4= 0 per cui A è ortogonale a C.

Esercizio

Dimostrare il teorema del seno.

Soluzione:

Supponiamo che un triangolo sia formato dai vettori in figura.



Allora
A+B+C=0

Moltiplicando vettorialmente per A:

AxA+AXB+AXC=AX0

AXB+AXC=0

Si la moltiplichiamo vettorialmente per B:

BXA+BXB+BXC=BX0

BXA+BXC=0

se la moltiplichiamo vettorialmente per C:

CXA+CXB+CXC=0

CXA+CXB=0

Dalla (i): AXB=CXA
Dalla (ii): BXA=CXB
Dalla (iii): CXA=BXC

Poichè il prodotto vettoriale è anticommutativo, si ottiene

AXB=CXA=BXC

Ovvero:

AB senθ_{AB} u =CA senθ_{CA} u =BC senθ_{BC} u

AB sen θ_{AB} = CA sen θ_{CA} = BC sen θ_{BC}

E, tenuto conto che (180-θ)=senθ, si ha :

AB senγ=CA senβ=BC senα

Dividendo tutto per A, B, C si ha:

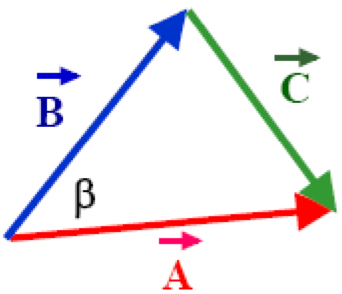
$$\frac{sen\gamma}{C} = \frac{sen\beta}{B} = \frac{sen\alpha}{A}$$

Esercizio

Dimostrare il teorema del coseno.

Soluzione:

Suponiamo di avere un triangolo formato dai vettori in figura.



Allora: C=A-B

Elevando al quadrato l'espressione:

C•C=(A-B)•(A-B)

C•C=(A•A)-(A•B)-(B•A)+(B•B)

C •C=(A•A)-2(A•B)+(B•B)

$C^2 = A^2 + B^2 - AB\cos\beta$

Esercizi proposti

ESERCIZIO N°1

Un vettore, nel piano XY, ha modulo $|v| = 25$ u, e forma un angolo di 35° con l'asse delle ascisse. Determinare le sue componenti v_x e v_y

ESERCIZIO N°2

La componente lungo l'asse x di un generico vettore $\vec{v}$ in un piano XY vale 12u mentre la componente lungo l'asse y vale 16u. Qual è il modulo del vettore? E la sua direzione?

ESERCIZIO N°3

Dati i vettori a = 5u e b = 8u formanti un angolo di 20◦, calcolare il modulo del vettore c = 2a + b e l'angolo che questo forma con il vettore b.

[c = 17, 73 u, β = 11, 1◦]

ESERCIZIO N°4

Tre vettori, a, b, c, hanno uguale intensità (6u). Calcolare gli angoli che b e c formano con il vettore a affinché la somma dei tre vettori sia nulla.

ESERCIZIO N°5

Dati i vettori a = 3u e b = 4u formanti un angolo di 2/9 π rad, calcolare il modulo del vettore c = 3a+2b e l'angolo δ (delta) che questo forma con il vettore b.

[c = 15, 98 u, δ = 21, 1◦]

ESERCIZIO N°6

Calcolare d = a + b + 2c sapendo che a = 5u , b = 4u e c = 3u, che l'angolo α (tra a e b) è pari a 7/6 π rad e β (fra a e c) è pari a 13/9 π rad. Calcolare anche l'angolo che il vettore d forma con il vettore b.

[d = 7, 93 u, δ = 63, 5◦]

ESERCIZIO N°7

Dati i vettori a = 5u e b = 3u formanti un angolo di 11/10 π rad, calcolare il vettore c = a+2b e l'angolo che questo forma con il vettore b.

[c = 1, 98 u, δ = 51, 3◦]

ESERCIZIO N°8

Calcolare l'angolo compreso tra due vettori di modulo 8u e 10 u, nel caso in cui il vettore risultante formi un angolo di 50◦ con il maggiore di essi. Calcolare anche il modulo del vettore risultante.

[α = 123, 2◦, c = 8, 73 u, β = 156, 8◦, d = 4, 12 u]

ESERCIZIO N°9

Dati i vettori a = 6u e b = 5u, determinare c = b − 3a e l'angolo che c forma con a. L'angolo fra a e b vale 32/45 π rad.

ESERCIZIO N°10

Due vettori formano un angolo di 60◦. Uno dei vettori è lungo 10 u (unità) e forma un angolo di 20◦ col vettore somma dei due. Trovare il modulo del secondo vettore e del vettore somma.

[|a| ≡ a = 5, 32 u, |b| ≡ b = 13, 47 u]

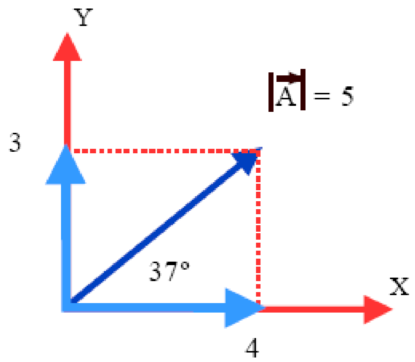
ESERCIZIO N°11

Due vettori formano un angolo di 110°. Uno dei vettori è lungo 20 u e forma un angolo di 40° con il vettore somma dei due. Trovare il modulo del secondo vettore e del vettore somma.

[b = 13,7u, c = 20u]

ESERCIZIO N°12

Sia v un vettore di modulo 5 e formante una direzione di 37° rispetto al piano positivo delle X nel piano XY. Calcolare le sue componenti cartesiane



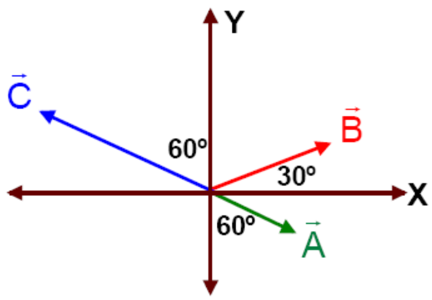
ESERCIZIO N°13

Sia B un vettore le cui componenti cartesiane sono $B_X=10$ e $B_Y=5$, situato nel piano XY. Calcolarne modulo e direzione.

ESERCIZIO N°14

A partire dai vettori mostrati in figura A, B e C i cui moduli sono rispettivamente 10, 20 e 30, si determini:

1. la proiezione di A nella direzione di C-B
2. un vettore D tale che 2D+B-2A=0



ESERCIZIO N°15

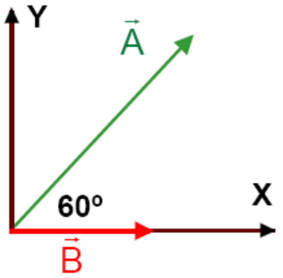
Calcolare la risultante dei vettori A e B di modulo rispettivamente 3u e 4u e che formano un angolo di 60° tra di loro.

ESERCIZIO N°16

Due vettori A e B di modulo rispettivamente 3u e 5u formano tra di loro un angolo di 37°. Determinare analiticamente il modulo della risultante e della differenza dei due vettori. Rappresentare graficamente i risultati ottenuti.

ESERCIZIO N°17

Calcolare la somma di due vettori di modulo 8 e 5 rispettivamente e che formano tra loro un angolo di 60°



ESERCIZIO N°18

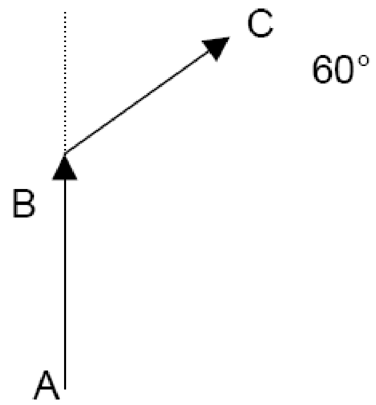
Dati i due vettori a e b di componenti $a_x = 2$ m; $a_y=2\sqrt{3}$m ; $b_x = 2\sqrt{3}$ m e $b_y = 2$ m,
calcolare:
a) il prodotto scalare
b) il prodotto vettoriale, in modulo, direzione e verso

ESERCIZIO N°20

Dati i vettori a e b con le seguenti caratteristiche a = 3u, α = 34°, b = 4u, β = 265° determinare analiticamente le componenti dei due vettori e quindi calcolare il vettore differenza $b - a$

ESERCIZIO N°21

Considera i due vettori spostamento *AB* e BC della figura. Calcola il vettore somma *AC.* sapendo che il modulo di *AB* e quello di *BC* misurano 100 m.



ESERCIZIO N°22

Trova graficamente la risultante di due vettori aventi lo stesso punto di applicazione e lo stesso valore v = 5 nei seguenti casi:
a) i due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso;
b) le direzioni dei due vettori formano un angolo di 90°:
c) i due vettori hanno la stessa direzione e verso opposto.

ESERCIZIO N°23

I vettori **a** e **b** hanno intensità a = 6.82 e b = 9,47. e formano tra loro un angolo di 45°. Quanto vale il prodotto scalare c = **a*b?**

ESERCIZIO N°24

Sono assegnati i vettori a e b con le seguenti caratteristiche: $|a|$ = 6.4; α° = 45°; $|b|$ = 6.9; β° = –74°. Calcolare il modulo e l'angolo del vettore c somma (risultati con almeno 4 cifre decimali)

ESERCIZIO N°25

Il vettore **a** è rivolto verso Nord e ha intensità a = 4,0. Il vettore **b** è rivolto verso Est e ha intensità b = 6,5. Come sono i vettori **c = a x b e d = a x c**

ESERCIZIO N°26

I vettori **a** e **b** giacciono entrambi nel piano XY. Il primo vettore ha modulo 4 cm ed è diretto a **45°** verso Est rispetto la direzione Nord: mentre il secondo è lungo 5 cm ed è diretto a 15° verso Nord rispetto la direzione Est. Calcola le componenti del prodotto vettoriale **c** = **a** x **b**

ESERCIZIO N°27

Dati i vettori **a** = (3, 4) e **b** = (7, 1), calcola analiticamente l’angolo compreso tra essi.

ESERCIZIO N°28

Sono dati due vettori, A=(8,3) e B=(4, ?). Determinare la componente B_y sapendo che A e B sono ortogonali.

ESERCIZIO N°28

Un punto parte dalla posizione di (2,5) e si sposta di 20m in una direzione che forma un angolo di 135° rispetto all'asse x in verso antiorario. Determinare le coordinate della posizione finale.

FISICA E REALTA'

ESERCIZIO N°29

Un'automobile percorre una strada in salita inclinata di 30° per 3Km. Si studino, sia analiticamente che graficamente le componenti orizzontale e verticale dello spostamento. Se lo spostamento raddoppia, le componenti orizzontale e verticale raddoppiano?

ESERCIZIO N°30

Un alpinista si avventura per un sentiero di 800m su una strada di montagna inclinata di 40°. Calcolare le componenti dello spostamento lungo gli assi X e Y. Si studino i risultati anche graficamente.

ESERCIZIO N°31

Un'automobile si sposta di 40 km a Est, poi di 30 km a Nord. Disegna i vettori che rappresentano gli spostamenti e determina lo spostamento risultante.

ESERCIZIO N°32

Antonio sta passeggiando nel parco e ad un certo punto si incammina per un viale che forma un angolo di 37° rispetto alla sua traiettoria iniziale. Di quanto è più lungo il suo cammino per giungere nel punto C dove lo attende Marta.

ESERCIZIO N°33

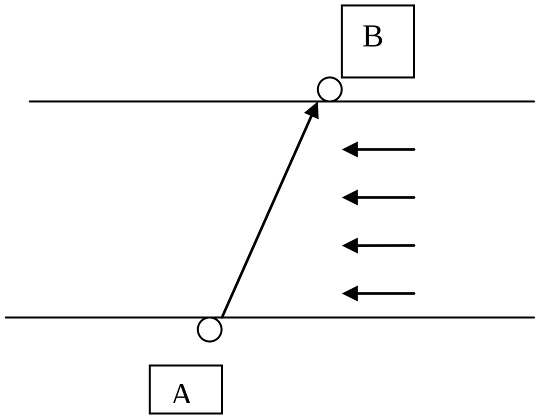
Una barca si muove lungo un fiume con una velocità di 10Km/h a 60° in direzione Sud – Ovest contro una corrente di 12Km/h. Qual è la sua velocità risultante?

ESERCIZIO N°34

Un aereo si muove verso nord con una velocità di 400Km/h, quando, ad un certo istante, è soggetto all'azione del vento che soffia a 120Km/h in direzione Est. Calcolare il moto risultante dell'aereo.

ESERCIZIO N°35

Uno spericolato nuotatore vuole attraversare un fiume dal punto A al punto B. Potendo nuotare a 2Km/h e sapendo che il fiume scorre a 5Km/h, con quale velocità effettiva il nuotatore attraverserà il fiume? Se il fiume è largo 90m, quanto misura AB?



ESERCIZIO N°36

Durante una giornata piovosa, un autista osserva le gocce cadere sul parabrezza dell'auto formando un angolo di 30°. Se l'auto viaggia a 45Km/h e la pioggia cade a 10m/s, qual è la velocità delle gocce di pioggia rispetto alla terra?

Esercizi di Ricapitolazione

Esercizio n°1

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + 2**j** B = 5 **i** **C** = 3**j** **D** = **i** – 2**j**

- Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
- Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
- Determinare e disegnare **L** = 3**A** – 2**B** + **C**.
- Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
- Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
- Scrivere gli scalari associati al versore j della seguente espressione vettoriale **S** = 5**A** – 2**P** + **C .** Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (2b ; 3a).

Esercizio n°2

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + **j** B = 4 **i** **C** = 3**j** **D** = **i** – **j**

- Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
- Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
- Determinare e disegnare **L** = 3**A** – 2**B** + **C**.
- Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
- Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
- Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale **S** = 3**A** – 2**P** + **C** Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (2b ; 3a).

Esercizio n°3

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + 2**j** B = 2 **i** + **j** **C** = **i** – 2**j** **D** = 4**j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 2**A** – **B** + 2**C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale
S = 3**A** – **P** + 2**C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (b ; 3a).

Esercizio n°4

Si considerino i seguenti vettori **A** = **i** + 2**j** B = – **i** + **j** **C** = – **i** + **j** **D** = **i** – 2**j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata

e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 2**A** – **B** + **C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.

Esercizio n°5

Si considerino i seguenti vettori **A** = **i** – 3**j** B = 4 **j** **C** = 2 **i** **D** = – **i** + **j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = **A** – 2**B** + 3**C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale
S = 3**A** – 2**P** + **C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (2b ; – a).

Esercizio n°6

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + **j** B = 2 **i** + **j** **C** = **i** – 2**j** **D** = 4**i**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 2**A** – **B** + 2**C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **j** della seguente espressione vettoriale
__S = 3**A** – **P** + 2**C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (b ; 3a).

Esercizio n°7

Si considerino i seguenti vettori **A** = **i** + 2**j** B = – **i** + **j** **C** = – **i** + **j** **D** = **i** – 2**j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = **A** – **B** + **C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale
__S = **A** – 2**P** + **C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (b ; a).

Esercizio n°8

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + **j** B = 4 **i** **C** = 5**j** **D** = **i** – **j**

– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 3**A** – **B** + **C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale
S = 3**A** – 2**P** + **C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (2b ; 3a).

Esercizio n°9

Si considerino i seguenti vettori **A** = **i** – **j** B = 3**i** – 4**j** **C** = **i** + 5**j** **D** = – 2**j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 2**A** – **B** + 2**C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **j** della seguente espressione vettoriale
S = **A** – 2**P** + **C**
Dove **S** = (a ; b) e **P** = (2b ; – a).

Esercizio n°10

Si considerino i seguenti vettori **A** = – **i** + **j** B = **i** + **j** **C** = 2**i** – **j** **D** = 3**i** – **j**
– Disegnare i vettori **A** e **B**, trovare la risultante graficamente e determinare le sue componenti cartesiane.
– Determinare graficamente la risultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** utilizzando il metodo della spezzata e trovare le relative componenti cartesiane.
– Determinare e disegnare **L** = 2**A** – **B** + **C**.
– Calcolare il prodotto scalare p = **A**·**D**.
– Disegnare i vettori **C** e **D** e determinare il prodotto vettoriale **M** = **C** ∧ **D**.
– Scrivere gli scalari associati al versore **i** della seguente espressione vettoriale
S = 3**A** – **P** + 2**C**
Dove **S** = (a ; 2b) e **P** = (b ; 2a).

Esercizio n°11

Dato un sistema di riferimento cartesiano (x, y), siano dati i seguenti vettori : **a**=5**i**+7**j** e **b**=8**i**+3**j**, dove **i** e **j** sono versori (vettori di modulo unitario). Si calcoli: 1) il modulo dei vettori **a** e **b**; 2) l'angolo tra i due vettori; 3) il modulo del vettore **a** + **b** e l'angolo tra l'asse x positivo e il vettore ottenuto; 4) il modulo del vettore **a** - **b** e l'angolo tra l'asse x positivo e il vettore ottenuto; 5) il modulo del vettore **b** - **a** e l'angolo tra l'asse x positivo e il vettore ottenuto.

Esercizio n°12

Dato un sistema di riferimento cartesiano (x, y), sia |a| = 5 il modulo del vettore **a** e sia α= 95° l'angolo formato tra l'asse x positivo e il vettore. Si determinino le componenti del vettore.

Esercizio n°13

Dato un sistema di riferimento cartesiano (x, y), siano dati i seguenti vettori **a**=3 **i**+4 **j** e **b**=7**i**. Si calcoli il prodotto scalare a · b e b · a.

Esercizio n°14

Dato un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z), siano dati i seguenti vettori **a**=3**i** e **b**=7**j**. Si calcoli il vettore **c** = **a** × **b** e **d** = **b** × **a**. Quale `e la relazione tra i vettori **c** e **d**?

Esercizio n°15

Un nuotatore vuole attraversare un fiume che scorre con velocità v_f = 2 m/sec. Si supponga che il nuotatore nuoti con velocità v_n = 2 Km/h perpendicolarmente al fiume . Si calcoli l'angolo tra la direzione del fiume e la traiettoria effettiva del nuotatore. (Si consideri un sistema di riferimento cartesiano (x, y) in cui il nuotatore all'istante iniziale occupi l'origine e il fiume scorra lungo l'asse delle x positivo). Se il fiume `e largo 0.5 km, a che distanza sull'altra riva approderà ?

Esercizio n°16

Una nave a motore ha velocità di punta pari a 15 nodi. Deve raggiungere un punto posto alcune miglia a Nord, e la corrente punta in direzione S-W con intensità di 5 nodi. In che direzione pone la barra il timoniere avveduto ?

Esercizio 17

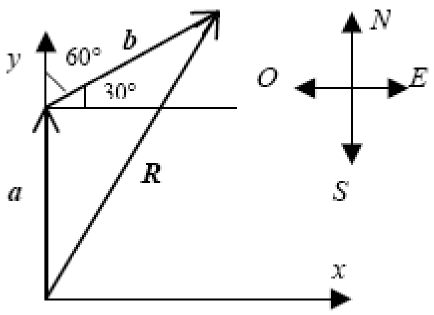
Rispetto ad una terna cartesiana ortogonale di origine O e versori **i**, **j**, e **k** due vettori spostamento **a** e b hanno componenti **a** (6,8,0) e **b** (2,1,$\sqrt{11}$) Le componenti sono espresse in metri. Si determini:

1) il modulo dei vettori, il valore del loro prodotto scalare, l'angolo tra i due vettori.
2) uno dei vettori forma un angolo di $\pi/3$con **i**: quale?
3) esprimere le componenti dei versori. Se si misurano le distanze in centimetri come cambiano le componenti dei vettori e dei relativi versori?
4) si scrivano le componenti dei vettori **c=a**+**b** e **d=a-b**.
5) se i due vettori e sono applicati ad un medesimo punto P, quanto vale la distanza tra i punti estremi.
6) se **a** è applicato in P, mentre è applicato all'estremità di **a**, quanto vale la distanza tra P e l'estremo di **b**
7) se **a** è applicato nell'origine O e nel punto P di coordinate OP = (2,0,0), quanto vale la distanza fra gli estremi di **a** e **b**
8) determinare le componenti dei versori perpendicolari al piano formato da **a** e da **i**.
9) determinare le componenti dei versori perpendicolari ad **a** e a **k**

10) utilizzando i versori trovati in 8) e 9) si costruisca una nuova terna cartesiana ortogonale e si scrivano le nuove componenti di **a** e di **b**
11) con le nuove componenti cosa cambia nelle risposte alle domande 1) ....9)?

Esercizio 18

Un'automobile percorre 20 km in direzione nord, successivamente 35 km in direzione 60 gradi nord-est. Si calcoli: il vettore spostamento risultante, il versore del vettore spostamento e lo spazio totale percorso.



Esercizio 19

Una imbarcazione è spinta a velocità V = 5 m/s rispetto all'acqua in direzione bussola 270 gradi (cioè da est verso ovest). Sapendo che la corrente dell'acqua è v = 1 m/s da nord a sud, si trovi la velocità dell'imbarcazione rispetto alla terra ferma. Quale rotta dovrebbe tenere il comandante per mantenere una rotta est-ovest, quale è in questo caso la velocità rispetto alla terra ferma.

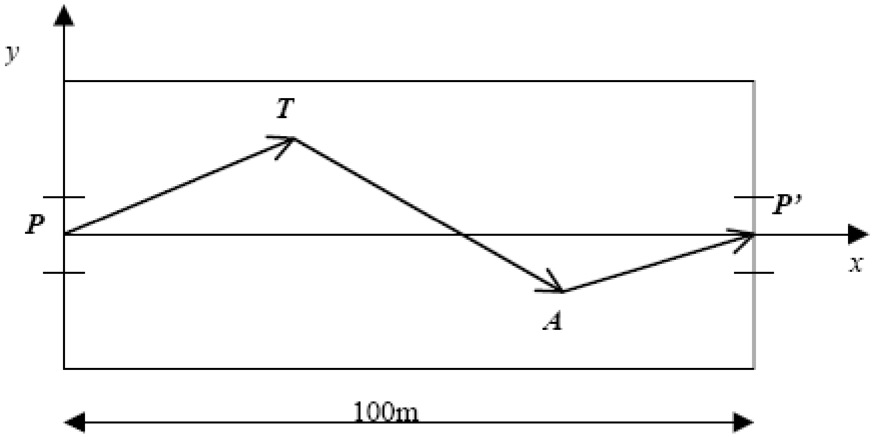
Esercizio 20

Una macchina si è spostata in linea retta da un punto P ad un punto Q descritti rispetto ad un sistema di assi cartesiano dai vettori posizione $r_p = 5i + 6j + 2k \ \ e \ \ r_Q = 3i - 2i + 7k$ metri. Si calcoli lo spostamento **PQ** e il versore dello spostamento.

Esercizio 21

Durante una partita di calcio, il portiere P, dal centro della propria porta, rilancia la palla al terzino T che si trova ad una distanza d =30 m dalla sua linea di fondo e s = 20 m dalla sua sinistra. Il terzino poi passa la palla all'attaccante A che si trova ad una distanza h =80 m dalla linea di fondo ed a = 15 m a destra del proprio portiere.

1) Quale direzione e verso deve imprimere alla palla l'attaccante per centrate la porta avversaria se il campo di calcio è lungo 100 m?
2) Quale percorso e quale spostamento ha compiuto la palla nel momento in cui entra nella porta avversaria?



Esercizio 22

Si dia una stima della velocità della luce, se un telescopio deve essere inclinato di 20,5” rispetto alla verticale per osservare una stella che, senza il moto di rivoluzione della terra intorno al sole $V_T = 29{,}77 \cdot 10^3 m/s$ si troverebbe sulla verticale.