Capitolo quarto
Il piano cartesiano. I numeri complessi. Polinomi ed equazioni algebriche

1. Premessa.

Una delle idee fondamentali nel campo della matematica, rivelatasi tra le piú feconde, è quella che è alla base dell'attuale *Geometria Analitica* e che consiste nell'individuare le *posizioni* dei punti in un piano o nello spazio euclideo rispettivamente per mezzo di coppie e di terne di numeri reali. Tali numeri, che sono determinati prefissando un *riferimento*, costituito nel piano da una coppia e nello spazio da una terna di assi, si chiamano le *coordinate cartesiane* dei punti, in omaggio al filosofo e matematico francese René Descartes (1596-1650), detto Cartesio, a cui se ne attribuisce la paternità. Usufruendo delle coordinate cartesiane, un *ente* geometrico può essere individuato da una o piú *relazioni algebriche* tra le coordinate dei suoi punti. Lo studio sistematico di tali metodi è l'oggetto della Geometria Analitica.

I paragrafi seguenti sono dedicati ai primi elementi di Geometria Analitica piana, sufficienti per trattare gli argomenti di Analisi che verranno esposti piú avanti in questo volume.

2. Riferimento cartesiano ortogonale in un piano euclideo.

Siano: Π un piano euclideo, X e Y due assi ortogonali, o il loro punto di intersezione. Su ciascuno dei due assi X e Y si introduca un sistema di ascisse, rispetto ad uno stesso segmento unità di misura[1]. Se in Π si sceglie un verso positivo delle rotazioni, che sul foglio da disegno generalmente è quello antiorario, solitamente i due assi X e Y sono scelti in maniera tale che la misura in radianti del sostegno dell'angolo orientato positivo $+\widehat{XY}$ (vedi Appendice I) sia uguale a $\pi/2$ (vedi fig. 2.1).

[1] In certe situazioni conviene considerare differenti unità di misura.

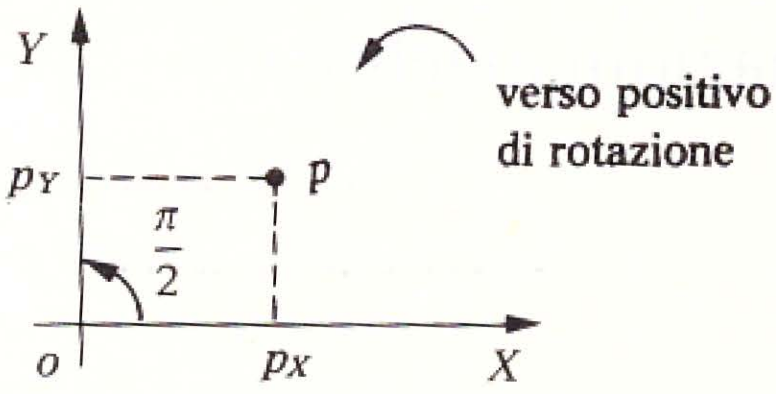


Fig. 2.1

Siano ora: p un punto di Π, p_X e p_Y le sue proiezioni ortogonali su X e Y rispettivamente, x e y rispettivamente le ascisse di p_X e p_Y rispetto ai sistemi di ascisse introdotti sui due assi X e Y, e si consideri l'applicazione che ad ogni punto p di Π fa corrispondere la coppia di numeri reali (x, y). È facile verificare che questa è un'applicazione biunivoca di Π su tutto $\mathbf{R}^2$. Orbene, quando su un piano Π sia stata scelta una coppia di assi ortogonali e si sia stabilita la suddetta corrispondenza, si dice che in Π è stato introdotto un *riferimento cartesiano*; i due assi X e Y si chiamano *assi cartesiani*, il punto o *origine* del riferimento, i due numeri x e y le *coordinate cartesiane* del punto p, e piú precisamente: x l'*ascissa* e y l'*ordinata* di p. Conseguentemente si dice anche che nel piano Π è stato introdotto un *sistema di coordinate cartesiane*. Nella suddetta corrispondenza un punto p del piano Π lo si denota con la coppia (x, y) delle sue coordinate e si usa piú semplicemente la frase *punto (x, y) del piano Π* anziché l'altra *punto p di Π di coordinate x e y*. Infine i due assi X e Y si chiamano anche *assi coordinati*; l'asse X si chiama *asse delle ascisse* o *asse x* e l'asse Y *asse delle ordinate* o *asse y*. Tali assi individuano quattro zone del piano, detti *quadranti*, costituiti dai punti (x, y) tali che: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ per il primo quadrante, $x \leq 0$ e $y \geq 0$ per il secondo, $x \leq 0$ e $y \leq 0$ per il terzo, $x \geq 0$ e $y \leq 0$ per il quarto (cfr. fig. 2.2)

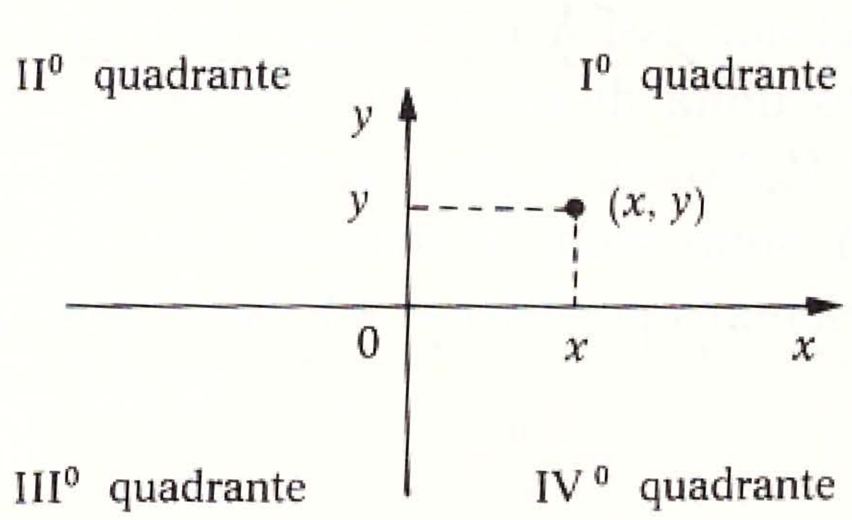


Fig. 2.2

3. Distanza di due punti di un piano euclideo. Equazione cartesiana di una retta e di una circonferenza.

1) Distanza di due punti.

Sia Π un piano euclideo, nel quale sia stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, e siano $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ due punti di Π. Un'immediata applicazione del teorema di Pitagora al triangolo p_1p_2p dà per la distanza $\overline{p_1p_2}$ di p_1 da p_2

$$\overline{p_1p_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{3.1}$$

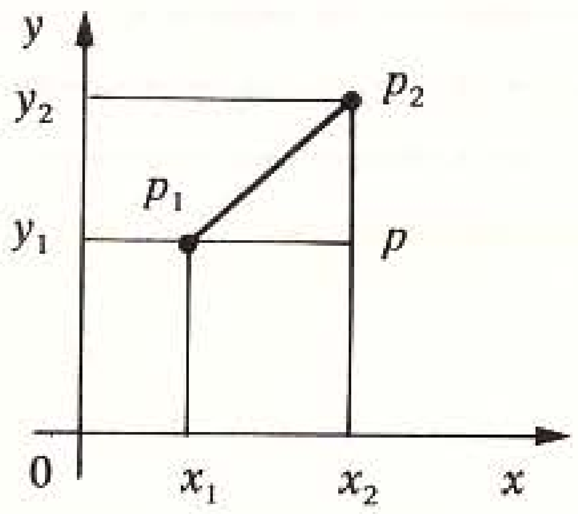


Fig. 3.1

2) Equazione cartesiana di una retta.

Siano: r una retta di Π non parallela a nessuno dei due assi coordinati, $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti di r, $p = (x, y)$ il generico punto di r.

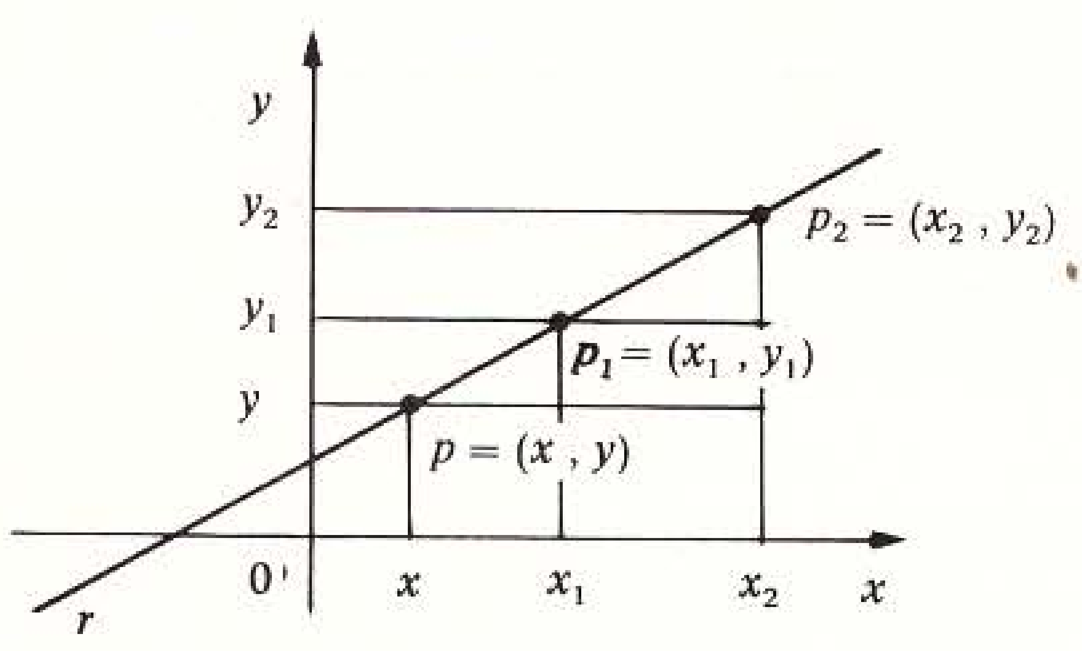


Fig. 3.2

Allora, se p è diverso da p_1 e da p_2, i triangoli simili della figura 3.2 danno l'uguaglianza di rapporti

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,, \tag{3.2}$$

che si può anche scrivere $(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$. Tale eguaglianza, banalmente verificata se $p=p_1$ oppure $p=p_2$, è soddisfatta dalle coordinate di tutti e soltanto i punti della retta r e si chiama l'*equazione cartesiana* di tale retta. Essa è del tipo

$$ax + by + c = 0 \tag{3.3}$$

ed è un'equazione lineare nelle due variabili x e y[1]. Se si cambia la coppia di punti p_1 e p_2, si ottiene un'equazione equivalente alla (3.3), i cui coefficienti sono cioè quelli della (3.3) moltiplicati per uno stesso fattore non nullo.

Se la retta r è parallela all'asse y e passa per il punto $(x_1, 0)$ dell'asse x, allora tutti e soltanto i punti di r hanno coordinate (x_1, y) soddisfacenti all'uguaglianza $x=x_1$ che perciò anche in tal caso si chiama equazione della retta r e rientra nel tipo (3.3). Analogamente, se la retta r è parallela all'asse x, e passa per il punto $(0, x_1)$ dell'asse y, l'equazione di r è $y=y_1$.

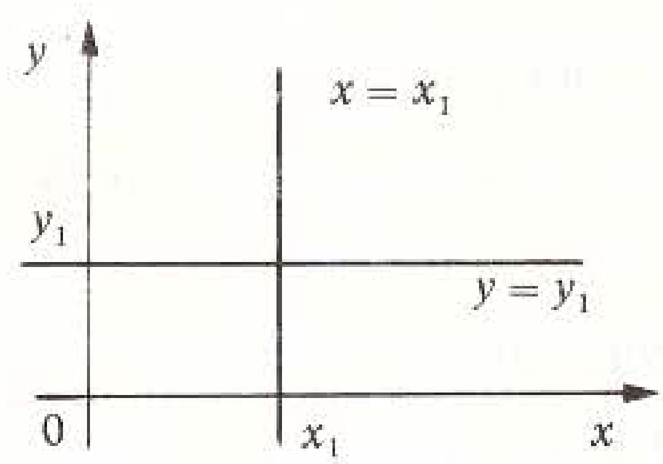


Fig. 3.3

Reciprocamente, ogni equazione lineare del tipo (3.3), nella quale non sia simultaneamente $a=b=0$, è facile verificare che è l'equazione di una retta del piano, e ogni equazione ad essa equivalente, i cui coefficienti cioè differiscono per uno stesso fattore non nullo, è equazione della stessa retta.

[1] Una funzione definita in $\mathbf{R}^2$ e a valori in $\mathbf{R}$, che in ogni coppia (x, y) di numeri reali assume il valore $ax + by + c$, dove a, b, c sono dei fissati numeri reali, dicesi *polinomio di primo grado* nel campo reale, di *coefficienti* a, b, c, nelle due *variabili reali* x e y, o, piú semplicemente *funzione lineare* nelle variabili reali x e y.

Una funzione definita in $\mathbf{R}^2$ e a valori in $\mathbf{R}$, che in ogni coppia (x, y) di numeri reali assume il valore $ax^2 + by^2 + cxy + hx + ky + d$, dove a, b, c, h, k, d sono dei fissati numeri reali, dicesi *polinomio di secondo grado* nel campo reale, di *coefficienti* a, b, c, h, k, d, nelle due variabili reali x e y.

Se $ax + by + c$ (risp. $ax^2 + by^2 + cxy + hx + ky + d$) è un polinomio di 1^0 grado (risp. 2^0 grado) nelle variabili reali x e y, il problema che consiste nel prendere in esame le coppie di numeri reali tali che $ax + by + c = 0$ (ris. $ax^2 + bx + cxy + hx + ky + d = 0$) dicesi *equazione algebrica di primo grado* o *equazione lineare* nelle due variabili x e y (risp. *equazione algebrica* di 2^0 grado nelle variabili x e y), e ogni siffatta coppia (x, y) di numeri reali dicesi una *soluzione* dell'equazione, o anche che *soddisfa all'equazione*.

3) Equazione di una circonferenza.

Siano: Γ una circonferenza di centro il punto $p_0 = (x_0, y_0)$ e raggio (di misura) r, $p = (x, y)$ il generico punto di Γ.

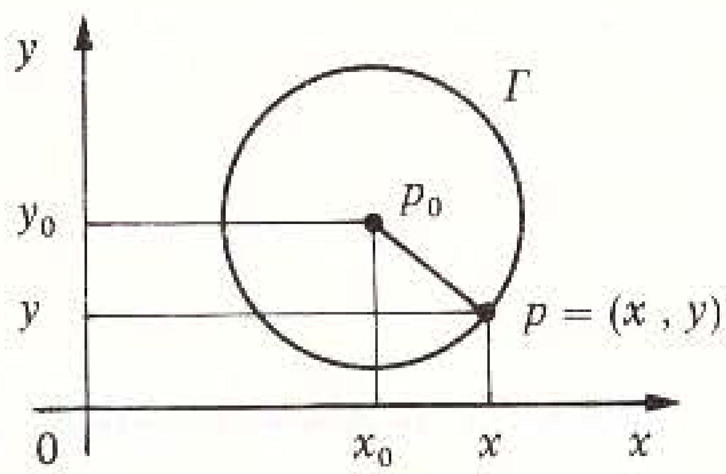


Fig. 3.4

Applicando la formula (3.1) alla distanza di p da p_0, si ottiene

$$(3.4) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Reciprocamente, ogni punto del piano le cui coordinate x e y soddisfano alla (3.4) è un punto della circonferenza Γ. In conclusione tutti e soltanto i punti della circonferenza Γ hanno coordinate x e y che soddisfano alla (3.4) che perciò dicesi *l'equazione della circonferenza* Γ. Essa è del tipo

$$(3.5) \qquad x^2 + y^2 + ay + by + c = 0 ,$$

che è un'equazione algebrica di 2^0 grado nelle due variabili x e y. Reciprocamente, perché un'equazione del tipo (3.5) sia l'equazione di una circonferenza, di centro (x_0, y_0) e raggio r, occorre e basta che $-2x_0 = a$, $-2y_0 = b$ e $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$. Conseguentemente la (3.5) è l'equazione della circonferenza di centro $(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e raggio $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$, a condizione che sia $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Complementi ed esercizi.

1. Tenendo presente la (3.2), si verifichi che tutti e soltanto i punti della retta r passante per i punti $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ hanno coordinate x e y date dalle eguaglianze

$$(3.6) \qquad \begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbf{R}$. Se t varia in $[0, 1]$, il punto le cui coordinate x e y sono date dalla (3.6) descrive il segmento della retta r di estremi p_1 e p_2.

Le uguaglianze (3.6) si dicono una *coppia di equazioni parametriche* della retta r e t dicesi *parametro*. Se i due punti p_1 e p_2 si sostituiscono con altri due punti $p'_1 = (x'_1 , y'_1)$ e $p'_2 = (x'_2 , y'_2)$ di r, si ottiene un'altra coppia di equazioni parametriche della stessa retta.

2. Poiché due rette di equazioni cartesiane rispettive

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

sono parallele se e solo se il sistema nelle incognite x e y costituito da tale equazioni non ha soluzioni oppure ne ammette infinite, esse sono parallele se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 ,$$

o, ciò è lo stesso, se e solo se $a' = ka$ e $b' = kb$, dove k è un numero reale.

Nel consegue in particolare che data una retta non parallela all'asse y, di equazione $y = mx + n$, la retta di equazione $y = mx$ è la retta ad essa parallela passante per l'origine.

3. Data una retta r non parallela all'asse y, chiamasi *coefficiente angolare* di r la tangente del sostegno dell'angolo orientato positivo di primo lato l'asse x e secondo lato la retta r orientata in uno dei due modi possibili (tale numero resta invariato cambiando l'orientamento della retta r).
Si verifichi che se la retta r ha equazione $y = mx + n$, m è proprio il suo coefficiente angolare.

4. Cerchi e rettangoli di un piano euclideo.

Siano: Π un piano euclideo, nel quale sia stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane; C un cerchio di centro $p_0 = (x_0 , y_0)$ e raggio r[1], $p = (x, y)$ il generico punto di C. Applicando la formula (3.1) alla distanza di p da p_0 si ottiene

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 . \tag{4.1}$$

Reciprocamente ogni punto del piano le cui coordinate soddisfano a tale diseguaglianza è un punto del cerchio C. In conclusione tutti e soltanto i punti del cerchio C hanno coordinate soddisfacenti alla (4.1), che è una disequazione algebrica

[1] Si badi che la circonferenza Γ di centro p_0 e raggio r è l'insieme dei punti p del piano che hanno distanza da p_0 uguale ad r, mentre il cerchio C di centro p_0 e raggio r è l'insieme dei punti p che hanno distanza da p_0 minore o uguale ad r.

di 2^0 grado nelle due variabili x e y[1].

È comodo, per i nostri scopi, considerare, accanto al cerchio C, l'insieme C' che si ottiene da esso togliendo la circonferenza Γ di centro p_0 e raggio r. Chiameremo tale insieme *cerchio aperto* di centro p_0 e raggio r. In contrapposizione il cerchio C chiamasi anche *cerchio chiuso* di centro p_0 e raggio r. Evidentemente, tutti e soltanto i punti $p=(x, y)$ del cerchio aperto C' hanno coordinate soddisfacenti alla relazione

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2 \tag{4.2}$$

che è anch'essa una disequazione algebrica di 2^0 grado nelle variabili x e y.

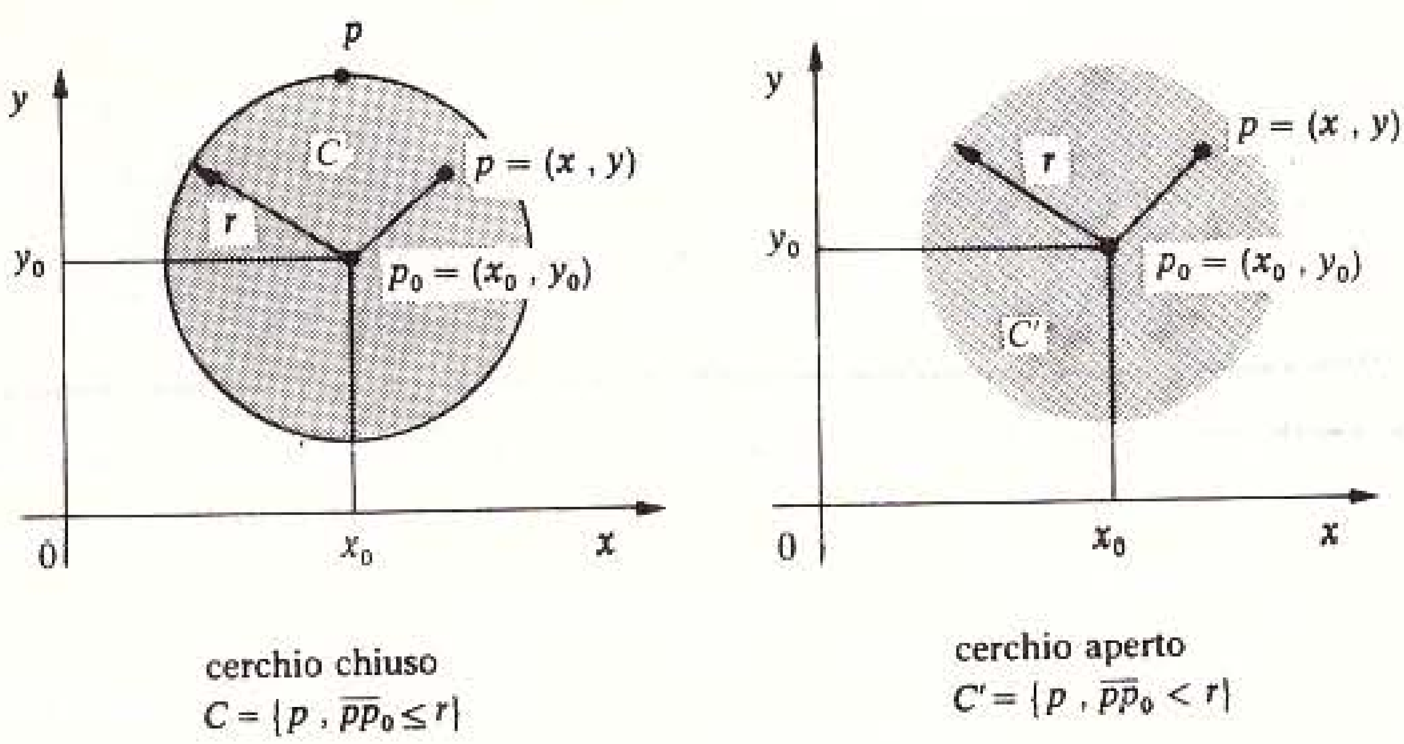


Fig. 4.1

Sia X un rettangolo del piano euclideo Π, con i lati paralleli agli assi coordinati, determinato dai due vertici opposti (a, c) e (b, d), con $a<c$ e $b<d$. È facile convincersi che tutti e soltanto i punti di X hanno coordinate x e y soddisfacenti alle relazioni

$$\begin{aligned} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{aligned} \tag{4.3}$$

che sono equivalenti all'altra

$$(x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

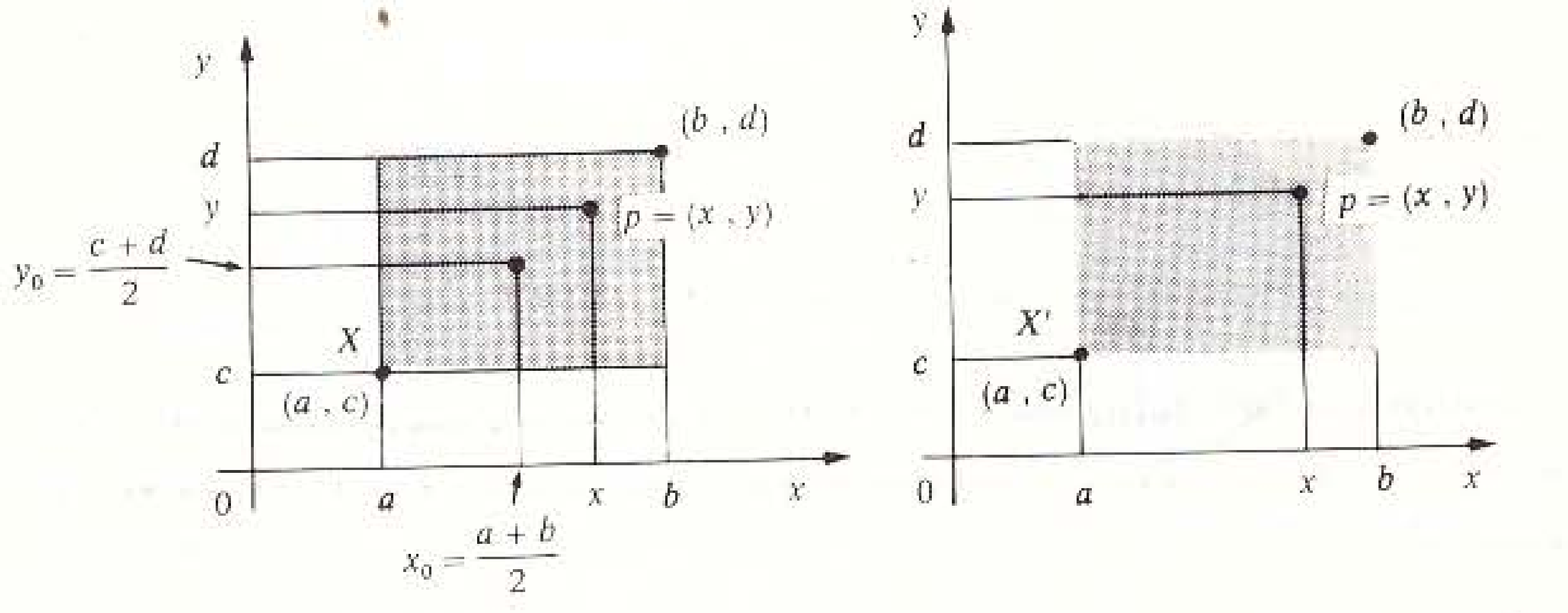
[1] Se $f(x, y)$ è un polinomio di 1^0 grado (risp. di 2^0 grado), nel campo reale, nelle due variabili reali x e y, e α è un numero reale, ognuno dei problemi che consistono nel prendere in esame le coppie (x, y) tale che $f(x, y) \le \alpha$, oppure $f(x, y) \ge \alpha$, oppure $f(x, y) < \alpha$, oppure $f(x, y) > \alpha$, dicesi *disequazione algebrica* di 1^0 grado (risp. di 2^0 grado) nelle due variabili reali x e y, e ogni siffatta coppia (x, y) dicesi una *soluzione* della disequazione, o anche che *soddisfa* alla disequazione.

È comodo per i nostri scopi considerare, accanto al rettangolo X, l'insieme X' che si ottiene da esso togliendo i quattro lati. Chiameremo tale insieme *rettangolo aperto* con i lati paralleli agli assi coordinati individuato dai due vertici opposti (a, c) e (b, d). In contrapposizione il rettangolo X si dice anche *chiuso*. Evidentemente, tutti e soltanto i punti di X' hanno coordinate x e y soddisfacenti alle relazioni

$$\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \end{array} \tag{4.4}$$

che sono equivalenti all'altra

$$(x, y) \in \,]\, a, b\, [\times]\, c, d\, [\,.$$



rettangolo chiuso $X = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$ rettangolo aperto $X' = \,]\,a\,,\,b\,[\times]\,c\,,\,d\,[$

Fig. 4.2

Si noti che il rettangolo chiuso X si proietta ortogonalmente sui due assi x e y in due segmenti chiusi che, nei sistemi di ascisse presenti sui due assi, rappresentano geometricamente gli intervalli chiusi $[a, b]$ e $[c, d]$ rispettivamente. Si noti anche che le coordinante x_0 e y_0 del centro di X sono date dai numeri

$$x_0 = \frac{a+b}{2}\,, \quad y_0 = \frac{c+d}{2}$$

che sono rispettivamente i centri degli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$. Analoghe precisazioni valgono per il rettangolo aperto X'.

5. Il piano cartesiano o numerico $\mathbf{R}^2$.

Nei paragrafi 2, 3 e 4 si è mostrato come, introdotto in un piano euclideo Π un riferimento cartesiano, a certi *oggetti* geometrici di Π è possibile associare una o piú relazioni analitiche soddisfatte dalle coordinate di tutti e soltanto i punti di quegli oggetti. Si è mostrato come questo si possa realizzare per una retta, un cerchio, una circonferenza, un rettangolo, e si potrebbe qui continuare. Tuttavia non è tanto importante qui per noi allungare tale elenco, quanto invece porre in rilievo che, in ogni caso, con metodi analoghi, ad ogni sottoinsieme X di Π si può fare corrispondere un sottoinsieme Y di $\mathbf{R}^2$ che è quello costituito dalle coppie (x, y) di numeri reali che sono le ascisse e le ordinate di tutti e soli i punti di X.

Ora, questa stessa situazione può essere riguardata cambiando il punto di vista, ossia fissando come punto di partenza l'insieme $\mathbf{R}^2$. Si può dire cosí che l'insieme $\mathbf{R}^2$ si può *rappresentare geometricamente* con l'insieme dei punti del piano euclideo Π sul quale sia stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane; che, se Y è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, il sottoinsieme X di Π costituito dai punti le cui coordinate x e y sono quelle degli elementi di Y è l'insieme che *rappresenta geometricamente* Y sul piano Π. Cosí proprietà analitiche di Y vengono ad essere tradotte in proprietà geometriche di X. Tale insieme X potrà poi essere utilmente disegnato sul foglio da disegno, assunto come piano euclideo, e attraverso tale disegno si potranno, per cosí dire, *vedere* le proprietà dell'insieme Y.

In virtú di tale rappresentazione geometrica, gli elementi (x, y) di $\mathbf{R}^2$ si chiamano anche *punti* di $\mathbf{R}^2$. Non solo, ma tutta la struttura geometrica di piano euclideo, con il relativo linguaggio geometrico, possono essere *trasferiti* in $\mathbf{R}^2$. Si danno cosí le seguenti definizioni.

5.1 Definizione. Chiamasi distanza di due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di $\mathbf{R}^2$ il numero reale $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. La funzione d che ad ogni coppia (x_1, y_1), (x_2, y_2) di punti di $\mathbf{R}^2$ associa la loro distanza chiamasi *metrica euclidea* in $\mathbf{R}^2$.

Chiamasi *retta* di $\mathbf{R}^2$ di equazione (3.3) il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti (x, y) le cui coordinate soddisfano alla (3.3).

Chiamasi *circonferenza* di $\mathbf{R}^2$ di centro (x_0, y_0) e raggio r l'insieme dei punti (x, y) di $\mathbf{R}^2$ le cui coordinate soddisfano all'equazione (3.4).

Chiamasi *cerchio, chiuso* o *aperto*, di $\mathbf{R}^2$, di centro (x_0, y_0) e raggio r, l'insieme dei punti (x, y) di $\mathbf{R}^2$ le cui coordinate soddisfano alla disequazione (4.1) o (4.2).

Chiamasi *rettangolo, chiuso* o *aperto*, di $\mathbf{R}^2$ l'insieme dei punti (x, y) di $\mathbf{R}^2$ le cui coordinate soddisfano a relazioni del tipo (4.3) o (4.4), o, ciò che è lo stesso, un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ del tipo $[a, b] \times [c, d]$ o del tipo $]a, b[\times]c, d[$, con $a < b$ e $c < d$.

Orbene, l'insieme $\mathbf{R}^2$, quando sia stato munito della struttura di piano euclideo cosí come sopra precisato, chiamasi *piano cartesiano* o anche *piano numerico*.

5.2. Osservazione. Se si tenesse presente la definizione assiomatica della geometria euclidea piana, si potrebbe riconoscere nel piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ un modello di piano euclideo. Riteniamo però opportuno guardare a $\mathbf{R}^2$, munito della suddetta struttura, cosí come del resto abbiamo fin qui fatto, come a qualcosa di distinto da un piano euclideo, e guardare a quest'ultimo come a un concetto preacquisito e consolidato attraverso la nostra cultura geometrica.

A proposito della metrica euclidea, è importante mettere in luce che

5.3. Teorema. *La metrica euclidea d in $\mathbf{R}^2$ gode delle seguenti proprietà:*

1) $d(p, q) \geq 0$ *qualunque siano i punti p e q di $\mathbf{R}^2$;*
2) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;
3) $d(p, q) = d(q, p)$ *qualunque siano i punti p e q di $\mathbf{R}^2$;*
4) $|d(p, z) - d(z, q)| \leq d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q)$ *qualunque siano i punti p, q, z di $\mathbf{R}^2$* (proprietà triangolare).

Dimostrazione. Le prime tre sono ovvie. Quanto alla 4), essa è anche ovvia se p, q e z sono allineati. In tal caso è vera l'uguaglianza a destra o a sinistra della 4) a seconda che z sia interno oppure esterno al segmento di estremi p e q. Se invece i tre punti z, p e q non sono allineati, la 4) traduce la situazione geometrica nota che in un triangolo la misura di un lato è minore della somma delle misure degli altri due lati e maggiore della differenza, in valore assoluto, delle misure degli altri due lati.

Complementi.

1. La diseguaglianza a sinistra nella 4), $|d(p, z) - d(z, q)| \leq d(p, q)$, si può ottenere come conseguenza della diseguaglianza a destra, $d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q)$. Infatti, supposto che quest'ultima sia valida per ogni terna p, q, z di punti di $\mathbf{R}^2$, si ha

$$d(p, z) \leq d(p, q) + d(q, z)$$

$$d(z, q) \leq d(p, q) + d(z, p)$$

e quindi anche

$$d(p, z) - d(q, z) \leq d(p, q)$$

$$d(p, z) - d(z, q) \geq - d(p, q)$$

e queste due relazioni sono equivalenti all'altra $|d(p, z) - d(z, q)| \leq d(p, q)$.

2. È possibile dare una dimostrazione algebrica diretta della diseguaglianza $d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q)$.

Posto $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$, $z = (x_3, y_3)$, la diseguaglianza da provare è

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

che si può anche scrivere, ponendo $x_1 - x_3 = a_1$, $x_3 - x_2 = b_1$, $y_1 - y_3 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$,

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Ora, essendo $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$, si ha $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq$ $\leq (a_1^2 + a_2{}^2)(b_1^2 + b_2^2)$ o, ciò che è lo stesso, $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$ che implica $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$. Tale diseguaglianza è equivalente all'altra

$$2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \leq 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)} + a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$$

che si può scrivere

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2,$$

diseguaglianza, questa, equivalente a quella richiesta.

6. Riferimento polare in un piano euclideo.

Siano: Π un piano euclideo nel quale sia stato scelto un verso positivo di rotazione, X una retta orientata, o un punto di X. Se p è un qualunque punto di Π diverso da o, sia X_p la semiretta orientata di origine o passante per p. Restano allora individuate la distanza ϱ di p da o e la misura generalizzata in radianti ϑ del sostegno dell'angolo orientato positivo $+\widehat{XX_p}$, determinata a meno di multipli interi relativi di 2π (cfr. Appendice I). I numeri ϱ e ϑ cosí determinati si chiamano

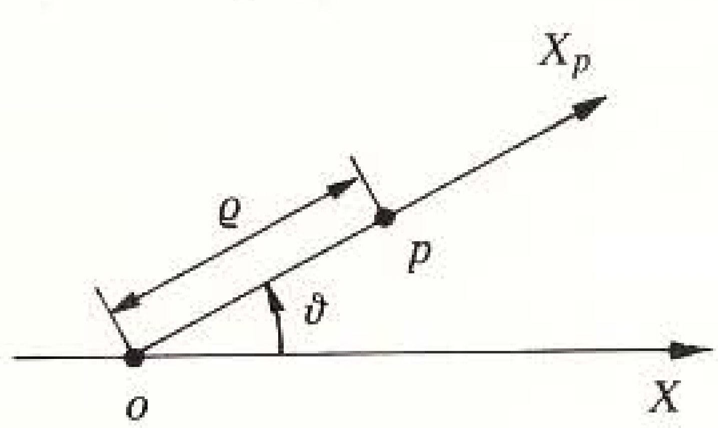


Fig. 6.1

coordinate polari del punto p. Piú precisamente: ϱ chiamasi *raggio vettore* o *modulo* del punto p, e ϑ, determinato a meno di multipli interi relativi di 2π, chiamasi *anomalia* o *argomento* del punto p. Si conviene poi che il punto o abbia modulo nullo e argomento un qualunque numero reale. Se p è diverso da o, il valore ϑ^* dell'argomento del punto p soddisfacente alla limitazione

$$-\pi < \vartheta^* \leq \pi$$

chiamasi *argomento principale* di p.

Orbene, quando in un piano euclideo orientato sia stato fissato un asse X, scelto un suo punto, e sia stata considerata l'applicazione che ad ogni punto p di Π fa corrispondere le coordinate polari di p sopra definite, si dice che nel piano Π è stato introdotto un *sistema di coordinate polari* di *polo* o e *asse polare* l'asse X.

Supponiamo ora che nel piano orientato Π siano stati simultaneamente considerati un sistema di coordinate cartesiane di origine il punto o e assi coordinati X e Y, e un sistema di coordinate polari con polo coincidente con o e asse polare coincidente con l'asse X. È allora evidente che dalle coordinate polari ϱ, ϑ del

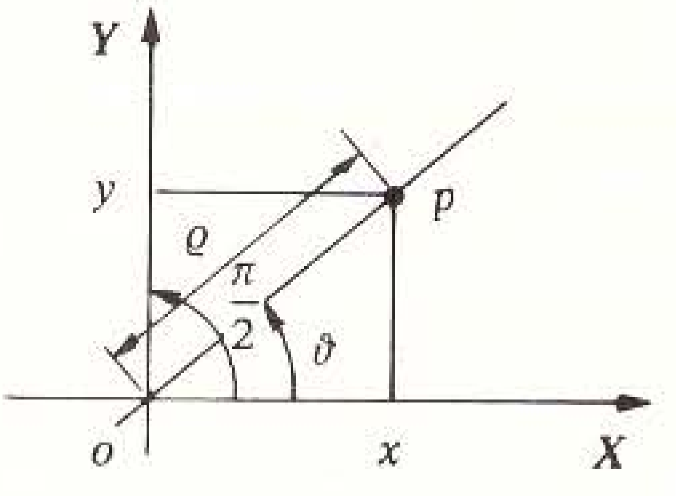


Fig. 6.2

generico punto p del piano si può passare alle coordinate cartesiane x, y per mezzo delle uguaglianze

$$(6.1) \qquad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

(formule di passaggio dalle coordinate polari alle alle coordinate cartesiane)

Viceversa, dalle coordinate cartesiane x e y del generico punto $p \neq o$ si può passare alle coordinate polari ϱ e ϑ per mezzo delle uguaglianze

$$(6.2) \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \begin{cases} \cos \vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\[2ex] \operatorname{sen} \vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

che si ottengono risolvendo le (6.1) rispetto a ϱ e ϑ. Si osservi che le seconde delle (6.2) determinano univocamente l'argomento principale $\vartheta^* \in]-\pi, \pi]$ e che quindi tutti gli altri valori di ϑ sono dati dai numeri $\vartheta^* + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Un'analoga situazione sussiste se il sistema di coordinate polari ha polo coincidente con un punto $o' \neq o$ e asse polare l'asse passante per o' ed equiverso all'asse X. Se x_0 e y_0 sono le coordinate del punto o', le relazioni analoghe alle (6.1) e (6.2) sono le seguenti

$$\begin{cases} x = x_0 + \varrho \cos \vartheta \\ y = y_0 + \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \qquad \begin{cases} \cos \vartheta = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \\[2ex] \operatorname{sen} \vartheta = \dfrac{y - y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \end{cases}$$

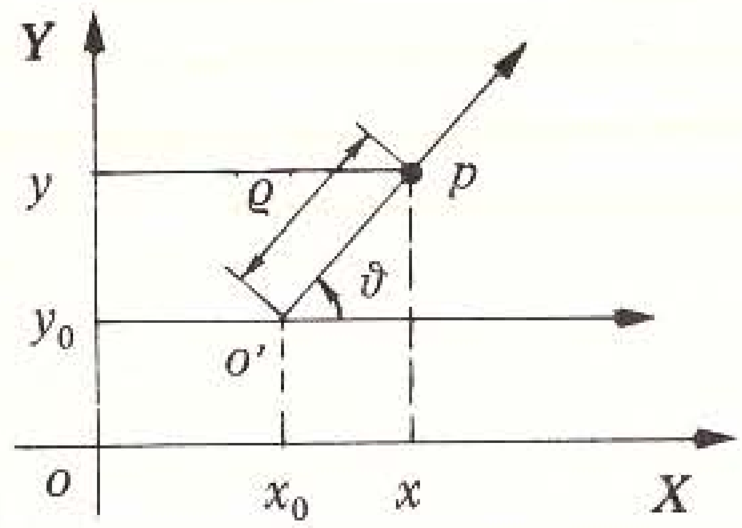


Fig. 6.3

6.1. Osservazione. Tutto ciò che si è detto resta perfettamente valido se come piano euclideo Π si considera il piano cartesiano $\mathbf{R}^2$. In tal caso le formule 6.1 e 6.2 vanno interpretate come formule di passaggio dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari dei punti di $\mathbf{R}^2$, quando come sistema di riferimento cartesiano si consideri il *riferimento canonico* in $\mathbf{R}^2$, in cui gli assi coordinati sono l'asse x, costituito dai punti del tipo $(x, 0)$, e l'asse y, costituito dai punti del tipo $(0, y)$.

7. I numeri complessi. Introduzione.

Si è visto come con l'introduzione dei numeri reali trovano la giusta soluzione problemi come quello della misura di grandezze e quello dell'esistenza della radice n-ima di un numero positivo. Alla base di ciò vi è la completezza dell'insieme $\mathbf{R}$, il quale, come abbiamo visto, ha la struttura di campo ordinato completo. Resta tuttavia l'impossibilità di risolvere nell'ambito dei numeri reali equazioni algebriche come la semplicissima equazione $x^2 + 3 = 0$, che è equivalente all'altra $x^2 = -3$: difatti non esiste alcun numero reale il cui quadrato sia un numero reale negativo, o, se si vuole, non esiste nell'ambito dei numeri reali la radice quadrata di un numero reale negativo.

L'esigenza di dare un qualche significato alla radice quadrata di un numero reale negativo si pose per la prima volta nel sedicesimo secolo, a proposito della risoluzione dell'equazione di terzo grado. La formula di risoluzione di tale equazione, data da Gerolamo Cardano (1501-1576) nel 1545[1], portava infatti, quando l'equazione aveva tre soluzioni reali e distinte, a radici quadrate di numeri reali negativi, pur essendo il risultato costituito da soluzioni reali.

L'impossibilità di considerare nell'ambito dei numeri reali la radice quadrata di un numero reale negativo porta alla ricerca di un insieme numerico **C** piú ampio dell'insieme **R** dei numeri reali, il quale sia strutturato anch'esso come campo e nel quale sia possibile l'estrazione della radice quadrata di un numero reale negativo. Si può subito osservare che un insieme numerico **C** piú ampio di **R** gode di quest'ultima proprietà se esiste un *nuovo* elemento di **C**, denotiamolo con i, tale che $i^2=-1$. Infatti, se a è un numero reale negativo, i *numeri* $i\sqrt{-a}$ e $-i\sqrt{-a}$ godono della proprietà che $(i\sqrt{-a})^2=(-i\sqrt{-a})^2=a$. Ne consegue in particolare che $(i\sqrt{3})^2=(-i\sqrt{3})^2=-3$ e quindi $i\sqrt{3}$ e $-i\sqrt{3}$ sono entrambi soluzioni dell'equazione $x^2=-3$.

8. La definizione ingenua dei numeri complessi.

Le precedenti considerazioni portano in una prima fase, *ingenua*, a considerare l'insieme **C** di tutte le *espressioni* della forma $x+iy$, dove x e y sono numeri reali e i è una nuova *entità* godente della proprietà che $i^2=-1$. In tale insieme **C** vengono ad essere evidentemente inclusi i numeri reali, potendo questi essere ottenuti dall'espressione $x+iy$ per $y=0$. Se in **C** vengono introdotte le operazioni di addizione e di moltiplicazione, trattando $x+iy$ come una normale espressione nell'ambito dei numeri reali, ma tenendo in più presente che $i^2=-1$, se cioè si pone

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i\,(y+y')$$

$$(x+iy)\cdot(x'+iy')=(xx'-yy')+i\,(xy'+x'y),$$

si verifica facilmente che **C** ha rispetto a tali operazioni + e − la struttura di campo. Lo zero del campo si ottiene per $x=y=0$ e coincide con lo zero dei numeri reali, l'unità del campo si ottiene per $x=1$ e $y=0$ e coincide col numero reale 1. Inoltre l'opposto di $x+iy$ è

[1] Le formule risolutive delle equazioni di 3° e di 4° grado furono pubblicate da Cardano nel 1545 e si possono considerare come il piú importante risultato ottenuto nel settore dell'Algebra, dopo quattromila anni, da quando i Babilonesi avevano dato la formula risolutiva dell'equazione di 2° grado. Come il Cardano stesso affermò, l'idea della risoluzione dell'equazione di 3° grado l'aveva avuta Nicolò Tartaglia (1500-1577) mentre la risoluzione dell'equazione di 4° grado era stata trovata da Ludovico Ferrari (1522-1565).

$$-(x+iy) = -x - iy$$

e il reciproco di ogni elemento $x+iy \neq 0$ è

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2},$$

ottenuti, come si vede, formalmente operando come sull'insieme dei numeri reali.

Orbene, gli elementi di **C** si chiamano *numeri complessi* e conseguentemente **C** chiamasi insieme dei numeri complessi. Il numero complesso i si chiama *unità immaginaria*.

9. La definizione assiomatica dei numeri complessi.

Si pone qui un problema analogo a quello in cui ci siamo imbattuti quando abbiamo presentato gli insiemi numerici **N**, **Z**, **Q** e **R**: si pone cioè l'esigenza di una definizione piú soddisfacente, dal punto di vista logico, dell'insieme dei numeri complessi. A tale scopo, si parte dalla constatazione che, cosí come l'abbiamo definito nel n. 8, l'insieme **C** dei numeri complessi, rispetto alle due operazioni $+$ e $\cdot$ di addizione e di moltiplicazione, è un campo che contiene come suo sottocampo il campo ordinato dei numeri reali e inoltre contiene un elemento i godente della proprietà $i^2 = -1$. Orbene, sono proprio queste le proprietà su cui si può basare la definizione assiomatica di **C**. Si deve solo avere l'accortezza di considerare un campo che sia il piú piccolo possibile. In proposito sussiste il seguente

9.1. Teorema. *Sia $\mathscr{C}$ un campo, rispetto a due operazioni di addizione e di moltiplicazione, $+$ e $\cdot$, godente delle seguenti proprietà:*

1) $\mathscr{C}$ contenga un sottocampo ordinato completo, o, se si vuole, $\mathscr{C}$ contenga come suo sottocampo il campo ordinato completo **R** *dei numeri reali*[1]*;*

2) $\mathscr{C}$ contenga un elemento i tale che $i^2 = -1$.

Allora, per ogni $z \in \mathscr{C}$ esiste al piú una coppia (x, y) di numeri reali tali che z sia esprimibile nella forma $z = x + iy$, e il sottoinsieme **C** *di $\mathscr{C}$ costituito dagli elementi z suscettibili di tale decomposizione è il piú piccolo sottocampo di $\mathscr{C}$ godente delle stesse proprietà 1), 2).*

[1] Abbiamo già detto che il campo ordinato dei numeri reali è definito a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. Allo scopo di provare che se $z \in \mathscr{C}$ e (x, y) e (x', y') sono due coppie di numeri reali tali che simultaneamente si ha $z = x + iy$ e $z = x' + iy'$, necessariamente è $x = x'$ e $y = y'$, basta osservare che l'uguaglianza $x + iy = x' + iy'$ è equivalente all'altra $x - x' = -i\,(y - y')$, che a sua volta implica $(x - x')^2 = -(y - y')^2$, uguaglianza quest'ultima valida se e solo se $x = x'$ e $y = y'$.

Quanto al fatto che **C** sia un campo godente delle stesse proprietà 1) e 2) di cui gode $\mathscr{C}$, la verifica è stata già fatta nel n. 8, anche se gli elementi del tipo $x + iy$ erano stati riguardati lí come semplici *espressioni formali*. Infine, che **C** sia il piú piccolo sottocampo di $\mathscr{C}$ godente della proprietà 1) e 2) è ovvio giacché un qualunque sottocampo di $\mathscr{C}$ godente delle proprietà 1) e 2) deve necessariamente contenere gli elementi del tipo $x + iy$ e quindi contenere **C**.

Il teorema 9.1 permette di dare la seguente definizione assiomatica dell'insieme dei numeri complessi

9.2. Definizione. L'insieme **C** dei numeri complessi è un insieme munito di due operazioni, di addizione e di moltiplicazione, + e ·, rispetto alle quali sia un campo godente delle seguenti proprietà:

1) **C** contiene come suo sottocampo il campo ordinato completo **R** dei numeri reali;

2) esiste un elemento i di **C**, detto *unità immaginaria*, tale che $i^2 = -1$;[1]

3) **C** non contiene sottocampi propri godenti delle stesse proprietà 1) e 2).

La definizione 9.2 individua perfettamente quello che nel n. 8 abbiamo presentato in maniera ingenua come l'insieme dei numeri complessi. A giustificazione dell'indipendenza dell'insieme da assumere come campo dei numeri complessi, è doveroso però aggiungere che si può provare che due campi godenti delle proprietà 1), 2), 3) sono sempre *isomorfi tra loro*[2] e debbono essere quindi considerati come due modelli diversi dello stesso tipo di struttura.

9.3. Osservazione. Per il modo in cui è stato definito, il campo **C** dei numeri complessi, pur contenendo come suo sottocampo il campo ordinato completo dei numeri reali, non è però un campo ordinato. Ove mai esistesse, infatti, una rela-

[1] È ovvio che se l'elemento $i \in \mathbf{C}$ gode della proprietà $i^2 = -1$, allora si ha anche $(-i)^2 = -1$, ed è facile verificare che non esistono altri elementi x diversi da i e da $-i$ godenti della proprietà $x^2 = -1$. Non appena infatti l'elemento x è tale che $x^2 = -1$, ossia $x^2 + 1 = 0$, essendo $x^2 + 1 = (x + i)\,(x - i)$, deve necessariamente aversi $x = i$ oppure $x = -i$.

[2] Si può dimostrare il seguente teorema: Siano $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ due campi godenti delle proprietà 1), 2) e 3), $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ i sottocampi reali e i_1 e i_2 le unità immaginarie di $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ rispettivamente. Allora esiste uno ed un solo isomorfismo di $\mathbf{C}_1$ su $\mathbf{C}_2$ (nel senso che valgono le proprietà ii) e iii) della definizione 2.12 del cap. III), che induce un isomorfismo (nel senso completo della stessa definizione 2.12) tra $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, e che trasforma i_1 in i_2.

zione d'ordine totale $\leq$ in **C**, compatibile con le operazioni in **C**, si dovrebbe avere necessariamente $-1 < 0$, e nello stesso tempo, sia che fosse $i > 0$ oppure $i < 0$, si dovrebbe avere $i^2 > 0$, cioè $-1 > 0$, il che non è possibile.

A completamento di quanto fin qui è stato detto, mostriamo che è possibile costruire un campo **C** soddisfacente alle proprietà 1), 2) e 3) della definizione 9.2, prendendo come punto di partenza il campo ordinato completo **R** dei numeri reali. A tale scopo si osservi dapprima che se un tale campo **C** esiste, potendo scrivere ogni elemento di **C** nella forma (univocamente determinata) $x+iy$, con x e y appartenenti a **R**, ogni elemento di **C** individua ed è individuato da una coppia (x, y) di numeri reali, venendosi cosí a stabilire una corrispondenza biunivoca tra **C** e $\mathbf{R}^2$. La struttura di campo di **C** viene cosí ad essere *trasferita* in $\mathbf{R}^2$, ponendo

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

In tale struttura di campo cosí ottenuta in $\mathbf{R}^2$, lo zero e l'unità sono rispettivamente le coppie $(0, 0)$ e $(1, 0)$, il sottocampo reale è l'insieme delle coppie del tipo $(x, 0)$, l'opposto di un elemento (x, y) è $(-x, -y)$ e il reciproco di un elemento $(x, y) \neq (0, 0)$ l'elemento $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Infine l'unità immaginaria i è la coppia $(0, 1)$. Ciò premesso, il problema è sostanzialmente risolto: basta cambiare il punto di partenza. Infatti si verifica facilmente che un campo **C** soddisfacente alle proprietà 1), 2) e 3) è proprio l'insieme $\mathbf{R}^2$ munito delle due operazioni $+$ e $\cdot$, cosí come prima precisato, in cui come unità immaginaria i si prenda la coppia $(0, 1)$, e come sottocampo reale l'insieme delle coppie del tipo $(x, 0)$.
Evidentemente, poiché in base a queste ultime considerazioni l'insieme **C** dei numeri complessi è equipotente a $\mathbf{R}^2$, e poiché quest'ultimo ha la potenza del continuo (cfr. teor. 13.3 del cap. III), **C** ha la potenza del continuo.

10. La rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Si è visto nel numero 9 che ogni numero complesso si può porre nella forma $x + iy$, con x e y numeri reali, univocamente determinati. Tale notazione, che viene stabilita quando si dia un'impostazione assiomatica dei numeri complessi, ed è addirittura il punto di partenza nella loro definizione ingenua data nel numero 8, si chiama *notazione* o *forma algebrica* dei numeri complessi. Se z è un numero complesso espresso nella forma algebrica $x+iy$, x si chiama *parte reale* di z e si denota col simbolo $\mathscr{R}_e(z)$, iy si chiama *parte immaginaria* di z e si denota col simbolo $\mathscr{T}_m(z)$, mentre y si chiama *coefficiente della parte immaginaria* di z.

Poiché l'applicazione che ad ogni $x + iy \in \mathbf{C}$ fa corrispondere il punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ è un'applicazione biunivoca di $\mathbf{C}$ su $\mathbf{R}^2$, e poiché $\mathbf{R}^2$, come si è visto nel numero 5, si può rappresentare geometricamente con l'insieme dei punti di un piano euclideo nel quale sia stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, di questa stessa proprietà gode $\mathbf{C}$. Quando si consideri tale rappresentazione geometrica di $\mathbf{C}$ su un piano euclideo, il piano dicesi *piano complesso* o *piano di Gauss*. In tale rappresentazione, il punto p del piano complesso, che sia il corrispondente del numero complesso $x + iy$, si denota con lo stesso simbolo $x + iy$,

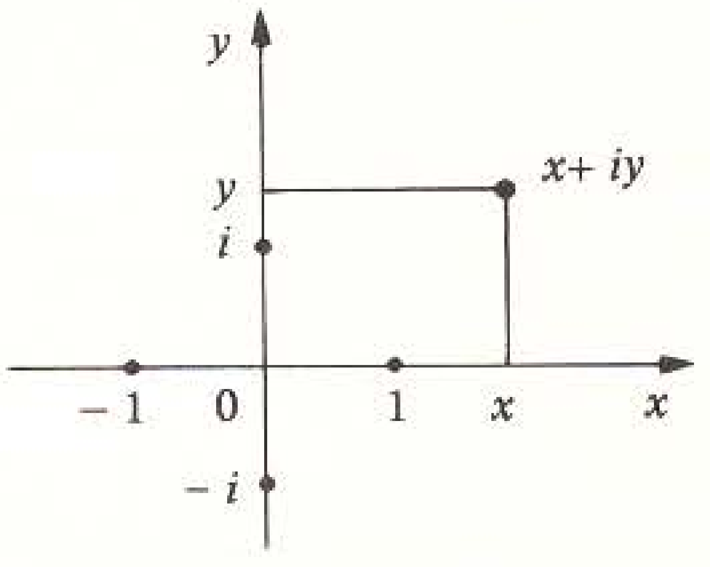


Fig. 10.1

che per questi motivi si chiama anche *notazione* o *forma cartesiana* del numero complesso. Evidentemente, i numeri reali vengono rappresentati con i punti dell'asse delle ascisse, che per questo motivo si chiama *asse reale*, mentre i numeri complessi del tipo iy, detti *immaginari puri*, sono rappresentati con i punti dell'asse delle ordinate, che per questo motivo chiamasi *asse immaginario* (vedi fig. 10.1).

Sotto l'aspetto storico, la rappresentazione geometrica dei numeri complessi fu per la prima volta considerata da Caspar Wessel (1745-1818) in un lavoro pubblicato nel 1798, e una trentina di anni dopo da Friedrich Gauss (1777-1855). Il lavoro di Wessel rimase però sconosciuto e pertanto la rappresentazione geometrica dei numeri complessi viene solitamente attribuita a Gauss.

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi permette una semplice interpretazione geometrica delle operazioni di addizione e di sottrazione. Se un punto p del piano complesso Π lo si considera come secondo estremo del segmento orientato $\overrightarrow{op}$, avente come primo estremo l'origine o degli assi, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i segmenti orientati di questo tipo (vedi fig. 10.2), secondo la quale, dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, il numero complesso somma $z_1 + z_2$ è individuato dal secondo estremo della diagonale orientata di origine o del parallelogramma di lati oz_1 e oz_2 (vedi fig. 10.3) e i numeri complessi differenza $z_1 - z_2$ e $z_2 - z_1$ sono individuati dai secondi estremi dei segmenti orientati di origine o e equipollenti ai segmenti orientati $\overrightarrow{z_2 z_1}$ e $\overrightarrow{z_1 z_2}$ rispettivamente. Questa regola geometrica per individuare nel piano complesso i numeri complessi $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ e $z_2 - z_1$ va sotto il nome di *regola del parallelogramma*.

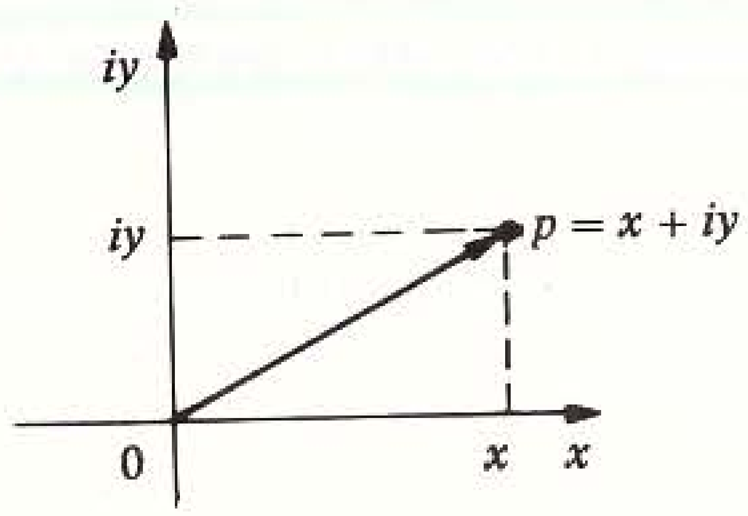


Fig. 10.2

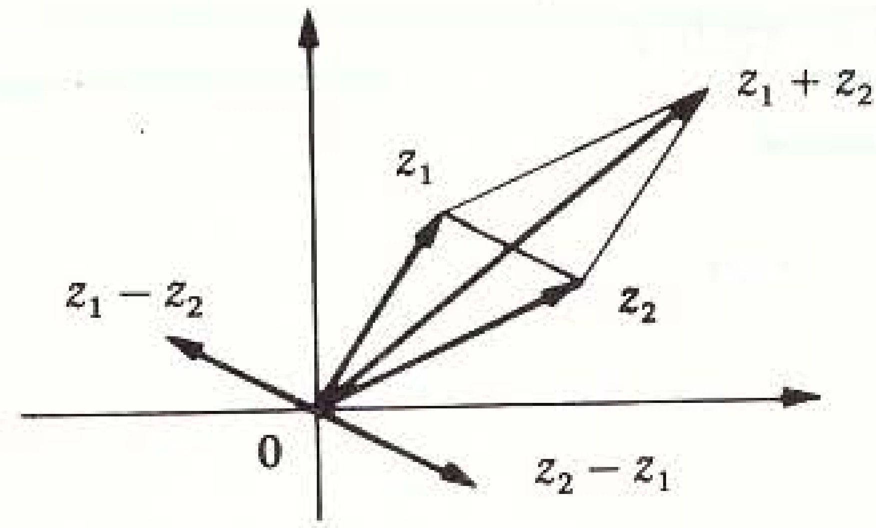
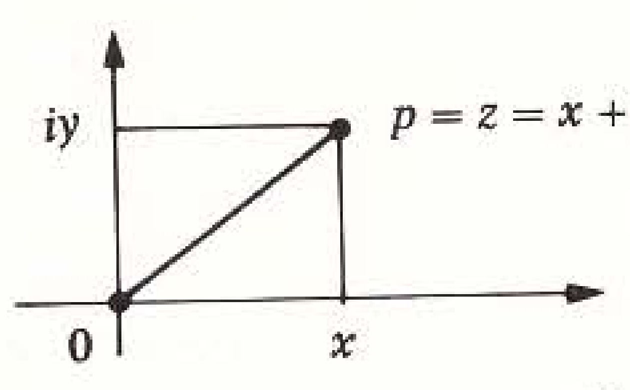


Fig. 10.3

11. Modulo di un numero complesso. Coniugato di un numero complesso.

11.1 Definizione. Chiamasi *modulo* di un numero complesso $z = x + iy$, e si denota col simbolo $|z|$, il numero reale $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Evidentemente, in un piano complesso Π il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ rappresenta la distanza dall'origine del punto p del piano corrispondente a z (cfr. fig. 11.1).



$$\overline{op} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Fig. 11.1

Si verifica facilmente che

11.2. Teorema. *Se z_1 e z_2 sono due numeri complessi, si ha*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(proprietà triangolare)}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Dimostrazione. Per provare la proprietà triangolare, basta tener presente la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, nonché la regola del parallelogramma (vedi fig. 10.3). Le altre due proprietà, poi, sono anch'esse di verifica immediata.

11.3. Definizione. Chiamasi *coniugato* di un numero complesso $z = x + iy$, e si denota col simbolo $\overline{z}$, il numero complesso $x - iy$.

Evidentemente

11.4. Teorema. *Se* $z = x + iy$ *è un numero complesso, allora*

$$\overline{(-z)} = -\overline{z} \quad , \quad z + \overline{z} = 2x \quad , \quad z - \overline{z} = 2iy$$

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \, ,$$

ossia il coniugato dell'opposto di un numero complesso è l'opposto del suo coniugato, la somma di un numero complesso e del suo coniugato è 2 volte la parte reale, la differenza di un numero complesso e del suo coniugato è 2 volte la parte immaginaria, il prodotto di un numero complesso e del suo coniugato è uguale al quadrato del suo modulo.

Inoltre, se z_1 *e* z_2 *sono due numeri complessi, si ha*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \qquad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2} \quad , \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

ossia il coniugato della somma, del prodotto, del quoziente di due numeri complessi è uguale rispettivamente alla somma, al prodotto, al quoziente dei coniugati dei numeri complessi dati.

Esercizi.

1. Tenendo presente le espressioni del quadrato e del cubo di un binomio note per i numeri reali, ma che valgono anche per i numeri complessi, si eseguano le seguenti operazioni di elevamento a potenza

$$(1 - 2i)^2 \quad , \quad (2 + i)^3 \, .$$

2. Si eseguano le seguenti operazioni di divisione, moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1}{(1-i)}, \quad \frac{3-i}{4+5i}.$$

3. Si verifichi che le potenze di esponente un intero positivo dell'unità immaginaria si ripetono a cicli di 4 secondo il seguente schema

i	-1	$-i$	1
i	i^2	i^3	i^4
.....	.....	.....	.....
i^{4n-3}	i^{4n-2}	i^{4n-1}	i^{4n}
.....	.....	.....	.....

4. Si dica in quale quadrante del piano complesso si trova il punto rappresentativo del numero complesso

$$\left(\frac{2+3i}{4i} - i\right) \cdot \frac{1}{i^3}.$$

12. Forma trigonometrica di un numero complesso.

Su un piano Π, nel quale sia stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, si rappresenti l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi. In Π si consideri anche un sistema di coordinate polari, con polo coincidente con l'origine degli assi cartesiani e asse polare coincidente con l'asse delle ascisse (cfr. n. 6). Se $x+iy$ è un numero complesso, e p è il suo punto rappresentativo nel piano complesso Π, siano ϱ e ϑ le coordinate polari di p rispetto al riferimento polare. Evidentemente il raggio vettore ϱ di p coincide col modulo del numero complesso $x+iy$. L'argomento ϑ di p, che si chiama *argomento del numero complesso* $x+iy$, è determinato a meno di multipli interi relativi di 2π se $x+iy \neq 0$, è un qualunque numero reale se $x+iy=0$. Se $x+iy \neq 0$, l'argomento principale ϑ^* di p, cioè quello soddisfacente alla limitazione $-\pi < \vartheta^* \leq \pi$, chiamasi *argomento principale* del numero complesso $x+iy$. Per quanto detto nel n. 6, il legame tra la coppia (x, y) e la coppia (ϱ, ϑ) è espresso dalle (6.1), dalle quali si ottiene $x+iy = \varrho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$; mentre le (6.2) consentono di calcolare il modulo e l'argomento del numero complesso, nota la sua espressione algebrica. La notazione

$$\varrho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

si chiama *notazione* o *forma trigonometrica* del numero complesso $x+iy$ e

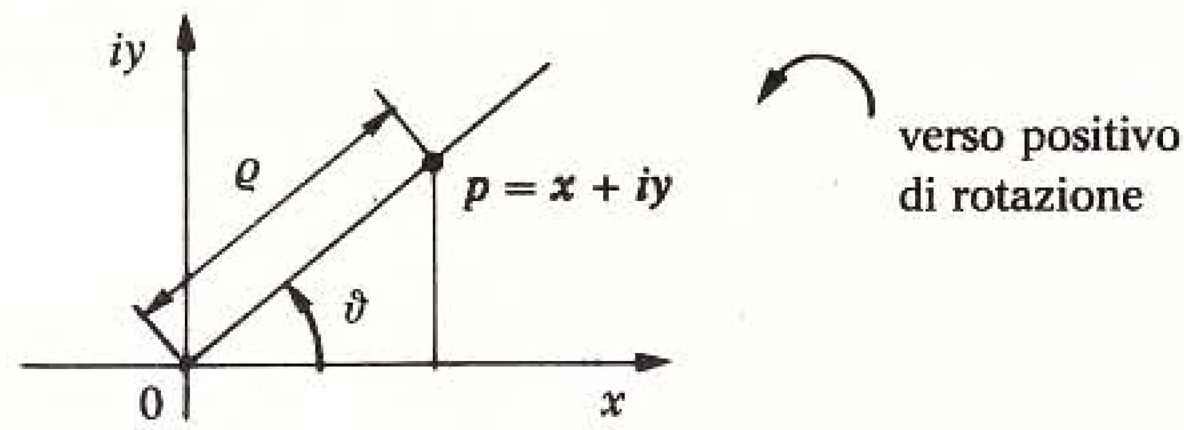


Fig. 12.1

qualche volta viene sostituita da quella piú semplice $(\varrho\ , \vartheta)$.

È evidente che: ogni numero reale $x > 0$ ha modulo x e argomento uno qualunque dei numeri $2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, mentre l'argomento principale è 0; ogni numero reale $x < 0$ ha modulo $|x|$, argomento principale π e quindi argomento uno qualunque dei numeri $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$; ogni numero complesso immaginario puro iy, con $y > 0$ ha modulo y, argomento principale $\pi/2$ e quindi argomento uno qualunque dei numeri $\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$; ogni numero complesso immaginario puro iy, con $y < 0$, ha modulo $|y|$, argomento principale $-\pi/2$, e quindi argomento uno qualunque dei numeri $-\pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.

La forma trigonometrica di un numero complesso è molto importante, come vedremo tra poco. Intanto è evidente che:

12.1. Proposizione. *Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e gli argomenti che differiscono per un multiplo intero relativo di* 2π.

Proviamo ora che

12.2. Teorema. *Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei numeri complessi dati. Il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti dei numeri complessi dati. Conseguentemente, la potenza di esponente un intero relativo* $k \neq 0$ *di un numero complesso è un numero complesso che ha per modulo la potenza k-ima del modulo e argomento il prodotto di k per l'argomento del numero complesso dato.*

Dimostrazione. Siano $\varrho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta)$ e $\varrho'(\cos\vartheta' + i\,\mathrm{sen}\vartheta')$ due numeri complessi. Si ha

$$\varrho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)\cdot\varrho'(\cos\vartheta' + i\ \mathrm{sen}\vartheta') = \varrho\varrho'[(\cos\vartheta\ \cos\vartheta' - \mathrm{sen}\vartheta\ \mathrm{sen}\vartheta') +$$
$$+ i\ (\cos\vartheta\ \mathrm{sen}\vartheta' + \mathrm{sen}\vartheta\ \cos\vartheta')]$$

e quindi

$$\varrho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)\cdot\varrho'(\cos\vartheta' + i\ \mathrm{sen}\vartheta') = \tag{12.1}$$
$$= \varrho\varrho'(\cos(\vartheta+\vartheta') + i\ \mathrm{sen}(\vartheta+\vartheta')).$$

Da qui, per l'unicità del reciproco di un numero complesso non nullo, si ha

$$\frac{1}{\varrho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)} = \frac{1}{\varrho}(\cos(-\vartheta) + i\ \mathrm{sen}(-\vartheta))$$

e conseguentemente

$$\frac{\varrho'(\cos\vartheta' + i\ \mathrm{sen}\vartheta')}{\varrho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)} = \frac{\varrho'}{\varrho}[\cos(\vartheta'-\vartheta) + i\ \mathrm{sen}(\vartheta'-\vartheta)] \tag{12.2}$$

Dalle (12.1) e (12.2), se k è un intero relativo non nullo, si deduce la formula

$$[\varrho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)]^k = \varrho^k(\cos k\vartheta + i\ \mathrm{sen}k\vartheta). \tag{12.3}$$

La 12.3 prende il nome di *formula di Moivre* sulla potenza intera di un numero complesso. La formula (12.1) permette di dare nel piano complesso una semplice interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi. Infatti, se z e z' sono due numeri complessi e (ϱ,ϑ) e (ϱ',ϑ') sono le loro rispettive espressioni trigonometriche, il numero complesso prodotto zz', avendo espressione trigonometrica $(\varrho\cdot\varrho',\vartheta+\vartheta')$, nel piano complesso è rappresentato dal punto che si trova ad una distanza $\varrho\varrho'$ dall'origine del sistema del riferimento, sulla semiretta $X_{zz'}$ tale che la misura generalizzata in radianti del sostegno dell'angolo orientato $+\widehat{XX_{zz'}}$, sia $\vartheta + \vartheta'$ (vedi fig. 12.2).

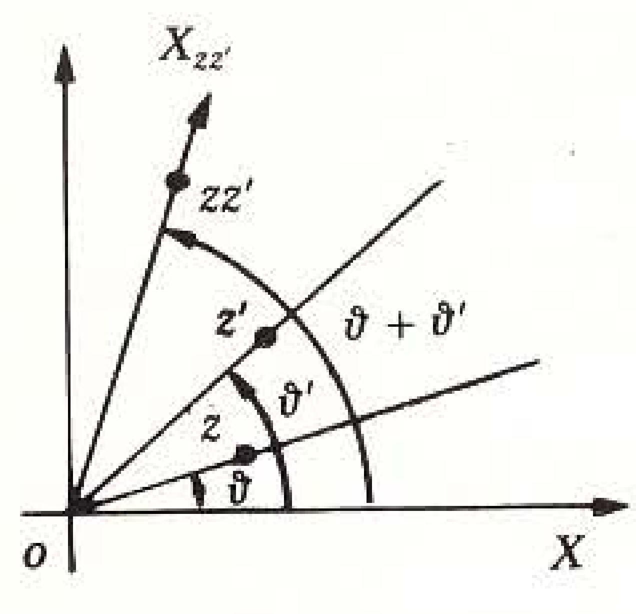


Fig. 12.2

Esercizi.

1. Si pongano in forma trigonometrica i numeri complessi

$$-\sqrt{3}-i\ ,\qquad \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\ ,\qquad 1-i\ .$$

A titolo di esempio, poniamo in forma trigonometrica $-\sqrt{3}-i$. Il modulo di tale numero è

$$\varrho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$

e l'argomento è quel numero ϑ, determinato a meno di multipli interi relativi di 2π, tale che

$$\cos\vartheta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \operatorname{sen}\vartheta=-\frac{1}{2}\ .$$

Evidentemente, tali uguaglianze sono soddisfatte per $\vartheta=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi$ e quindi l'argomento del numero $-\sqrt{3}-i$ è uno qualunque dei numeri $\vartheta=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$. L'argomento principale è $\vartheta^*=\frac{7}{6}\pi-2\pi=-\frac{5}{6}\pi$. In conclusione si può scrivere, scegliendo per esempio $\vartheta=\frac{7}{6}\pi$,

$$-\sqrt{3}-i=\left(2,\frac{7}{6}\pi\right)=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi\right).$$

2. Si calcoli, usufruendo della formula di Moivre, il numero complesso

$$(1+i)^4\ .$$

Poniamo $1+i$ in forma trigonometrica. Il suo modulo è $\varrho=\sqrt{2}$, l'argomento è un qualunque numero ϑ che soddisfa alle uguaglianze

$$\cos\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \operatorname{sen}\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Evidentemente tali uguaglianze sono soddisfatte per $\vartheta=\frac{\pi}{4}$: questo è quindi l'argomento principale del numero $1+i$, mentre $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$, è un qualunque altro valore dell'argomento.

Per la formula di Moivre si ha

$$(1+i)^4=\left(\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right)^4=(\sqrt{2}^4,\pi)=4\,(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)=-4\ .$$

3. Si esegua il prodotto

$$(-i)\,(3-3i)$$

oltre che algebricamente, ponendo i due numeri complessi in forma trigonometrica.

13. Radici n-ime di un numero complesso.

Si è visto che se x è un numero reale positivo e n è un numero naturale, esiste un unico numero reale positivo y tale che $y^n = x$. Tale numero si chiama radice n-ima di x e si denota con $\sqrt[n]{x}$. Si è poi osservato che se x è negativo e n dispari, il numero $y = -\sqrt[n]{(-x)}$ continua a godere della proprietà che $y^n = x$. Se n è pari e $x > 0$ allora oltre al numero $y = \sqrt[n]{x}$ anche l'opposto $-y = -\sqrt[n]{x}$ gode della proprietà che $(-y)^n = x$. Tutto questo nel campo reale. Nel campo complesso si è visto che se x è un numero reale negativo ed è $n=2$, allora i numeri complessi $w = i\sqrt{-x}$ e $-w = -i\sqrt{-x}$ godono della proprietà che $w^2 = (-w)^2 = x$. È naturale allora chiedersi: «se z è un qualunque numero complesso e n un intero positivo, quanti numeri complessi distinti w esistono tali $w^n = z$?» Se chiamiamo un tale numero complesso w una *radice n-ima di z nel campo complesso*, e lo denotiamo con $\sqrt[n]{z}$, il precedente quesito può essere posto nella forma equivalente: «nel campo complesso quante sono le radici n-ime distinte di un numero complesso z?» La risposta a tale quesito è data dal seguente

13.1. Teorema. *Di ogni numero complesso non nullo z esistono nel campo complesso n radici n-ime distinte, e n soltanto. Se l'espressione trigonometrica di z è* $z = \varrho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta)$, *le n radici n-ime distinte di z in forma trigonometrica si ottengono dalla formula*

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta)} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right), \tag{13.1}$$

nella quale $\sqrt[n]{\rho}$ *è la radice n-ima del numero positivo ρ nel campo reale, dando a k i valori* $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Dimostrazione. Sia w un numero complesso, che poniamo in forma trigonometrica $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$. Affinché esso sia una radice n-ima di z, cioè si abbia $w^n = z$, occorre e basta, in virtú della formula di Moivre, che

$$r^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi) = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta),$$

e quindi occorre e basta, a norma della 12.1, che esista un intero relativo k tale che

$$r^n = \varrho\ , \qquad n\varphi - \vartheta = 2k\pi\ .$$

Ciò si verifica se e solo se

$$r = \varrho^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\ .$$

A questo punto si potrebbe incautamente pensare che di radici n-ime del numero complesso z ce ne siano infinite, e cioè tante quanti sono gli interi relativi k. Invece è da tenere presente il fatto che due di tali radici corrispondenti ai valori k_1 e k_2 di k possono coincidere. Avendo lo stesso modulo, ciò si verifica se e solo se i loro argomenti differiscono per un multiplo intero relativo di 2π, cioè se e solo se esiste un intero relativo h tale che

$$\frac{\vartheta + 2k_1\pi}{n} - \frac{\vartheta + 2k_2\pi}{n} = 2h\pi$$

o, ciò è lo stesso, tale che $k_1 - k_2 = nh$.

Se ne deduce che esistono n radici n-ime distinte di z e n soltanto, che si possono ottenere dalla (13.1) dando a k n valori consecutivi: per esempio i valori 0, 1, ... , $n-1$.

Poiché le n radici n-ime distinte del numero complesso z che si ottengono dalla (13.1),

$$w_1 = \left(\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{\vartheta}{n}\right), \quad w_2 = \left(\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right), \dots, \quad w_n = \left(\varrho^{\frac{1}{n}}, \frac{\vartheta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

hanno lo stesso modulo $\varrho^{\frac{1}{n}}$, esse sono rappresentate in un piano complesso da punti che stanno sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\varrho^{\frac{1}{n}}$. D'altra parte gli argomenti di ogni coppia di tali radici, consecutive, differiscono dello stesso numero $2\pi/n$: allora le n radici $w_1, \dots, w_n$ sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella suddetta circonferenza (vedi la fig. 13.1 dove è contemplato il caso $n = 5$).

Dalla (13.1) si deduce in particolare che le radici n-ime nel campo complesso di un numero reale positivo x si ottengono dalla formula

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

dando a k i valori $0, 1, \dots, n-1$. Per $k=0$ si ottiene la radice positiva nel campo

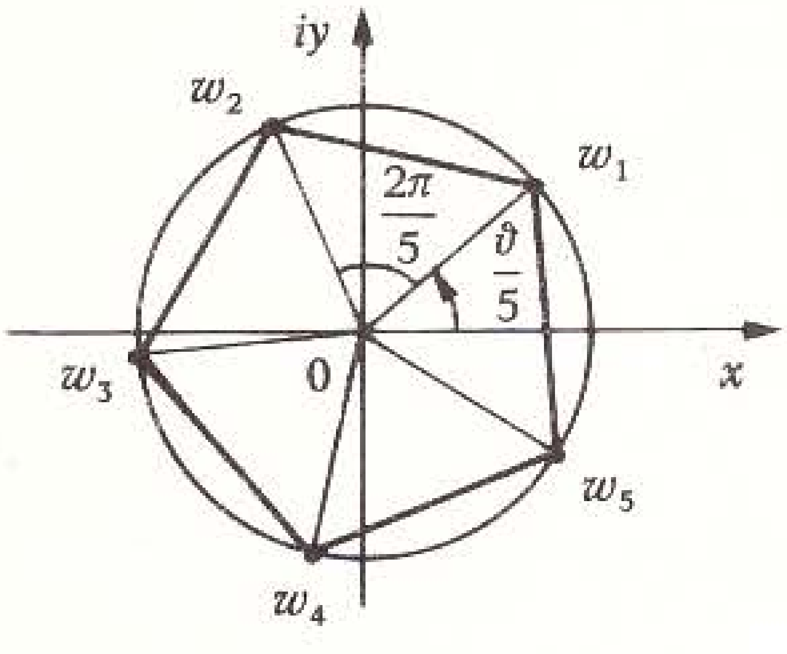


Fig. 13.1

reale $\sqrt[n]{x}$. Se n è pari, per $k = n/2$ si ottiene l'altra radice n- ima reale di x, $x^{\frac{1}{n}}(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -\sqrt[n]{x}$, opposta della precedente.

Sempre dalla (13.1) si deduce che le radici n-ime nel campo complesso di un numero reale negativo x si ottengono dalla formula

$$\sqrt[n]{x} = |x|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}\right), \tag{13.2}$$

dando a k i valori $0, 1, \dots, n-1$. Se n è dispari, per $k = \frac{n-1}{2}$ si ottiene l'unica radice n-ima reale che è $|x|^{\frac{1}{n}}(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) = -\sqrt[n]{|x|}$, dove $\sqrt[n]{|x|}$ è la radice n-ima di $|x|$ nel campo reale.

13.2. Osservazione. Se x è un numero reale negativo, la (13.2) si può anche scrivere

$$\sqrt[n]{x} = |x|^{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{-1}$$

e pertanto le n radici n-ime nel campo complesso di x si possono ottenere moltiplicando per la radice n-ima di x nel campo reale le n radici n-ime nel campo complesso di -1. In particolare, per esempio,

$$\sqrt[2]{-3} = \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{-1} = \pm\, i\sqrt{3}\,.$$

Complementi ed esercizi.

1. Si calcolino le radici quadrate del numero complesso $1 + i$.

L'espressione trigonometrica di $1+i$ è $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (vedi esercizio 2) del n. 12). Perciò le due radici quadrate richieste si ottengono dalla formula

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)$$

dando a k i valori 0 e 1. Le due radici sono dunque

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right)^{(1)} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9}{8}\pi\right) = -\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{(2)}.$$

2. Si calcolino nel campo complesse le radici $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-i}$ e si individuino i loro punti rappresentativi nel piano complesso.
Si ha

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(1,0)} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{3} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2\,,$$

e quindi le tre radici cubiche di 1 sono

$$w_0 = 1\,, \quad w_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi = -\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

$$w_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4}{3}\pi = -\cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Si ha poi

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2$$

[1] Applicando le formule di bisezione (vedi Appendice I, num. 7).

[2] Si noti in proposito che dalla (13.1) consegue che le due radici quadrate nel campo complesso di un qualunque numero complesso sono una opposta dell'altra.

e quindi

$$w_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_3 = \cos\frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

Nei due casi esaminati le radici si rappresentano nel piano complesso come nelle seguenti figure

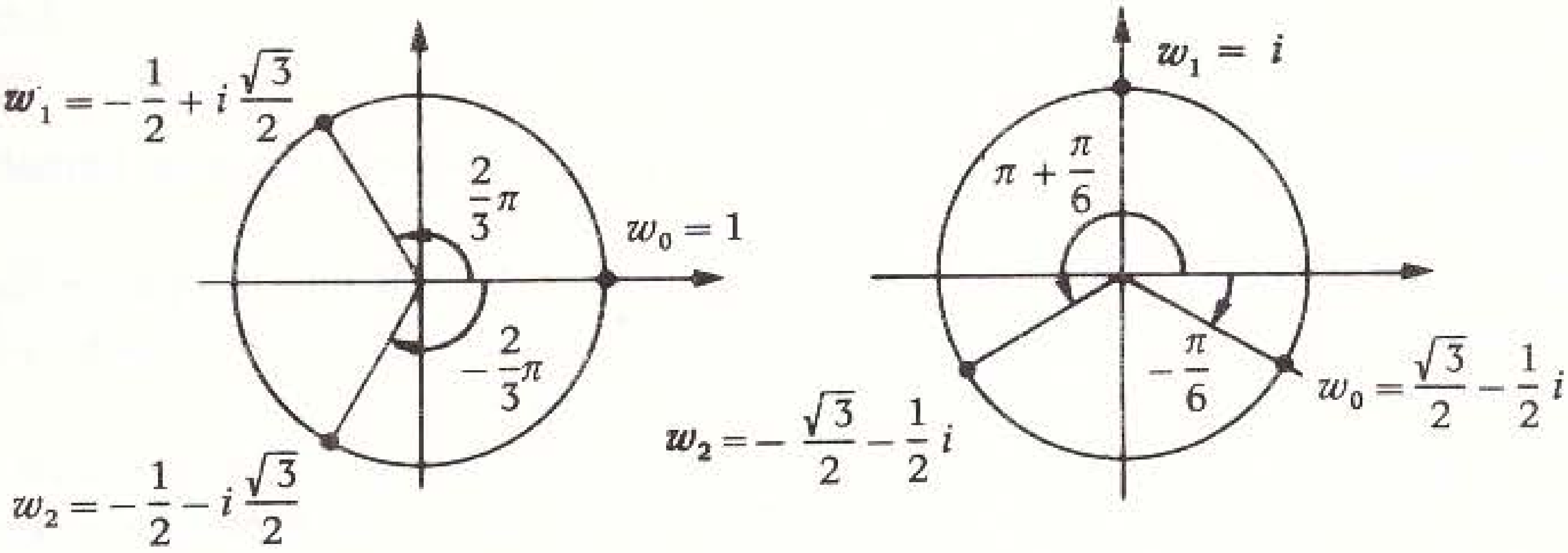


Fig. 13.2

3. Si calcolino le seguenti radici nel campo complesso

$$\sqrt[4]{-1-i}\,,\quad \sqrt[3]{2}\,,\quad \sqrt[3]{-3}\,,\quad \sqrt[5]{1}\,,\quad \sqrt[3]{\sqrt{3}-i}\,.$$

4. Se ε è una delle n radici n-ime del numero 1 nel campo complesso, qualunque sia l'intero h si ha

$$(\varepsilon^h)^n = (\varepsilon^n)^h = 1.$$

Perciò anche ε^h è una radice n-ima di 1.

Si dimostri che

Teorema. *Sia ε una delle radici n-ime di 1 ottenuta dalla formula*

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

in corrispondenza di un valore di k tale che $1 \le k \le n-1$, e che sia primo con $n^{(1)}$. Allora le n potenze di ε, $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$, sono tutte e soltanto le n radici n-ime distinte del numero 1.

[1] Evidentemente, qualunque sia l'intero posivito n, i valori $k = 1$ e $k = n - 1$ sono primi con n. Se n è un numero primo, allora ogni k tale che $1 \le k \le n-1$ è primo con n.

Una tale radice n-ima del numero 1, ε, chiamasi una radice n-ima *primitiva* dell'unità. Evidentemente, se $n=2$, $\varepsilon=-1$ è una radice quadrata primitiva di 1. Se $n=3$, $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+ i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono due radici cubiche primitive di 1.

14. Polinomi nel campo reale o complesso. Principio di identità dei polinomi.

14.1. Definizione. Se n è un intero positivo e $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono $n+1$ numeri complessi, la funzione p di $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ che in ogni numero complesso z assume il valore

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{14.1}$$

chiamasi *polinomio nel campo complesso*, o anche *polinomio in una variabile complessa*, di coefficienti complessi $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono numeri reali, la funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che in ogni numero reale z assume il valore (14.1) chiamasi *polinomio nel campo reale* o anche *polinomio in una variabile reale*, di coefficienti reali $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Il piú grande degli interi positivi $i \geq 1$ per i quali $a_i \neq 0$ chiamasi *grado* del polinomio. Se $a_i=0$ per ogni $i\geq 1$, il polinomio si riduce alla funzione costante a_0 e si dice di grado nullo.

Evidentemente, ogni polinomio nel campo reale è la restrizione ad $\mathbf{R}$ del polinomio nel campo complesso avente lo stesso grado e gli stessi coefficienti. Reciprocamente, dato un polinomio nel campo complesso che abbia coefficienti reali, la sua restrizione a $\mathbf{R}$ è un polinomio nel campo reale.

È anche evidente che se a è un numero complesso (risp. reale), $p(z)$ e $q(z)$ sono due polinomi nel campo complesso (risp. reale), le funzioni definite in $\mathbf{C}$ (risp. in $\mathbf{R}$): $z \to a\cdot p(z)$, $z \to p(z) \pm q(z)$, $z \to p(z)\cdot q(z)$ sono anch'esse dei polinomi in $\mathbf{C}$ (risp. in $\mathbf{R}$). Essi si chiamano rispettivamente polinomio prodotto tra la costante a e il polinomio $p(z)$, polinomio somma e differenza e polinomio prodotto dei due polinomi $p(z)$ e $q(z)$. È ovvio che il grado dei polinomi $p(z) \pm q(z)$ non supera né quello di $p(z)$ né quello di $q(z)$, mentre il grado di $p(z)\cdot q(z)$ è la somma dei gradi di $p(z)$ e di $q(z)$. Cosí, per esempio, se $p(z)=z^2+1$ e $q(z)=-z^2+z$, $p(z)+q(z)=z+1$ e $p(z)\cdot q(z)=(z^2+1)(-z^2+z)=-z^4+z^3-z^2+z$.

Secondo la definizione 14.1, le funzioni costanti di $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ o di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ sono classificate come polinomi di grado nullo. In particolare la funzione identicamente nulla in $\mathbf{C}$ o in $\mathbf{R}$ è un polinomio di grado nullo che assume costantemente valore nullo. Tale polinomio si chiama *polinomio nullo* nel campo complesso o nel campo reale rispettivamente.

In proposito è di fondamentale importanza constatare che

14.2. Teorema. *Il solo polinomio nel campo complesso (risp. nel campo reale) che sia identicamente nullo in* **C** *(risp. in* **R***) è il polinomio nullo.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un polinomio (14.1) nel campo complesso di grado $n \geq 1$ che sia identicamente nullo. Allora, per ogni $z \neq 0$ si può scrivere, essendo $a_n \neq 0$,

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}\right).$$

Ora, è facile verificare che il numero $\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}$ si può rendere in modulo piú piccolo di un prefissato numero reale positivo $\varepsilon < 1$, dando a z valori complessi il cui modulo sia sufficientemente grande. Conseguentemente per tali valori di z sarà $1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \neq 0$ e quindi sarà anche $p(z) \neq 0$: e ciò sarà in contrasto con l'ipotesi che $p(z)$ è identicamente nullo. Allo scopo di verificare quanto prima asserito, basta osservare che

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} + \cdots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^n} \tag{14.2}$$

e che il secondo membro di tale diseguaglianza è minore di ε se ogni addendo è minore di ε/n, ossia $\frac{a_i}{|a_n|} \frac{1}{|z^{n-i}|} < \frac{\varepsilon}{n}$ per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$. E ciò si verifica per ogni numero complesso z tale che $|z|^{n-i} > \frac{n}{\varepsilon} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|$.

È poi ovvio che questo stesso ragionamento serve per provare che l'unico polinomio nel campo reale che sia identicamente nullo è il polinomio nullo.

14.3. Definizione. Due polinomi $p(z)$ e $q(z)$ nel campo complesso (risp. reale) si dicono *identici* se in ogni numero complesso (risp. reale) z essi assumono lo stesso valore, ossia $p(z) = q(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$ (risp. per ogni $z \in \mathbf{R}$).

Poiché due polinomi $p(z)$ e $q(z)$ nel campo complesso (risp. reale) assumono lo stesso valore in ogni numero complesso (risp. reale) z se e solo se il polinomio differenza $p(z) - q(z)$[1] è identicamente nullo in **C** (risp. in **R**), dal teor. 14.2 consegue banalmente

[1] Se i polinomi $p(z)$ e $q(z)$ sono rispettivamente di grado n e m, con $n > m$, e si ha $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ e $q(z) = b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0$, il polinomio differenza $p(z) - q(z)$ ha l'espressione $p(z) - q(z) = a_n z^n + \cdots + a_{m+1} z^{m+1} + (a_m - b_m) z^m + \cdots + (a_1 - b_1) z + (a_0 - b_0)$.

14.4. Principio di identità dei polinomi. *Due polinomi nel campo complesso o nel campo reale sono identici se e solo se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti.*

15. Divisione di un polinomio per un altro.

È di fondamentale importanza nello studio dei polinomi il seguente

15.1. Teorema. *Se* $p(z)$ *e* $h(z)$ *sono due polinomi nel campo complesso (risp. reale), di gradi rispettivi n e m, con* $n \geq m$, *esistono e sono univocamente determinati due altri polinomi nel campo complesso (risp. reale),* $q(z)$ *e* $r(z)$, *tali che per ogni* $z \in \mathbf{C}$ (risp. $z \in \mathbf{R}$) *si abbia*

$$p(z) = h(z)\, q(z) + r(z)\,, \tag{15.1}$$

e dei quali $q(z)$ *abbia grado uguale a* $n-m$ *e* $r(z)$ *abbia grado* $\leq m-1$ *oppure sia il polinomio nullo.*

Dimostrazione. Si abbia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $h(z) = b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0$, e cominciamo col dimostrare l'esistenza di una coppia di polinomi $q(z)$ e $r(z)$ soddisfacenti alle condizioni richieste. Accantoniamo il caso banale $m=0$, in cui è $h(z) = b_0$, caso in cui basta porre $q(z) = \frac{1}{b_0} p(z)$ e $r(z)=0$, ed esaminiamo il caso in cui sia $m \geq 1$. Poniamo

$$r_1(z) = p(z) - \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} h(z)\,.$$

Poiché $\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} h(z)$ è un polinomio di grado n in cui il coefficiente di z^n è a_n, lo stesso di quello del polinomio $p(z)$, $r_1(z)$ ha grado $\leq n-1$. Se esso è allora il polinomio identicamente nullo, l'asserto è provato: basta prendere come polinomio $q(z)$ il polinomio $\frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$ e come polinomio $r(z)$ il polinomio nullo. Se invece $r_1(z)$ non è il polinomio nullo, detto $a_{1,n-1}$ il coefficiente di z^{n-1} [1], poniamo

$$r_2(z) = r_1(z) - \frac{a_{1,n-1}}{b_m} z^{(n-1)-m} h(z)\,.$$

[1] Evidentemente nullo se il grado di r_1 è minore di $n-1$.

Poiché $\frac{a_{1,n-1}}{b_m} z^{(n-1)-m} h(z)$ è un polinomio di grado $n-1$ il cui coefficiente di z^{n-1} è $a_{1,n-1}$, lo stesso di quello del polinomio $r_1(z)$, $r_2(z)$ ha grado $\leq n-2$. Se esso è allora il polinomio nullo, l'asserto è provato: basta prendere come polinomio $q(z)$ il polinomio $\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + \frac{a_{1,n-1}}{b_m} z^{(n-1)-m}$, e come polinomio $r(z)$ il polinomio nullo. Se invece $r_2(z)$ non è il polinomio nullo, si prosegue come prima. Il ragionamento può essere iterato $n-m+1$ volte. Nell'ultimo passo porremo

$$r_{n-m+1}(z) = r_{n-m}(z) - \frac{a_{n-m,m}}{b_m} h(z) .$$

Poiché $\frac{a_{n-m,m}}{b_m} h(z)$ è un polinomio di grado m, il cui coefficiente di z^m è $\frac{a_{n-m,m}}{b_m}$, lo stesso di quello del polinomio $r_{n-m}(z)$, $r_{n-m+1}(z)$ ha grado $\leq m-1$, oppure è il polinomio nullo. Cosí, ponendo $q(z)$ $\frac{a_n}{b_m} z^{n-m} + \dots + \frac{a_{n-m,m}}{b_m}$ e $r(z) = r_{n-m}(z)$, resta provata l'esistenza di una coppia di polinomi $q(z)$ e $r(z)$ soddisfacenti alle condizioni richieste.

Allo scopo di provarne l'unicità, supponiamo che si abbia simultaneamente per ogni $z \in \mathbf{C}$ (risp. $z \in \mathbf{R}$)

$$p(z) = q(z)\, h(z) + r(z) \quad , \quad p(z) = \bar{q}(z)\, h(z) + \bar{r}(z) ,$$

dove (q, r) e $(\bar{q}, \bar{r})$ sono due coppie di polinomi soddisfacenti alle condizioni richieste. Si ha allora per ogni $z \in \mathbf{C}$ (risp. $z \in \mathbf{R}$)

$$[q(z) - \bar{q}(z)]\, h(z) = \bar{r}(z) - r(z) .$$

Ora, tale uguaglianza, a norma del principio di identità dei polinomi, si può verificare solo se $q = \bar{q}$ e $r = \bar{r}$. L'asserto è cosí completamente provato.

Si noti che la dimostrazione del teor. 15.1 fornisce un metodo costruttivo per determinare i due polinomi $q(z)$ e $r(z)$, che si traduce nel procedimento pratico che il lettore sicuramente conosce.

15.2. Definizione. Nell'insieme dei polinomi nel campo complesso o nel campo reale, l'operazione che ad ogni coppia di polinomi $p(z)$ e $h(z)$, rispettivamente di gradi n e m, con $n \geq m$, associa la coppia di polinomi $q(z)$ e $r(z)$ determinati in base al teor. 15.1, chiamasi *divisione euclidea* e i due polinomi $q(z)$ e $r(z)$ si chiamano il *quoziente* e il *resto* della divisione euclidea di $p(z)$ per $h(z)$.

Se $r(z)$ è il polinomio nullo, si dice che il polinomio $p(z)$ è *divisibile* per il polinomio $h(z)$.

Esercizi.

1. Si determinino il quoziente e il resto della divisione euclidea del polinomio $p(z) = 3z^3 + 4z^2 - z + 1$ per il polinomio $h(z) = 2z^2 + 1$.

Si ha

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3z^3 & +\,4z^2 & -\; z & +\,1 & 2z^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-\,3z^3 & & -\frac{3}{2}\, z & & \frac{3}{2}\, z + 2 \\ \cline{1-3}
 & 4z^2 & -\frac{5}{2}\, z & +\,1 & \\
 & -\,4z^2 & & -\,2 & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{5}{2}\, z & -\,1 &
\end{array}
$$

e quindi $q(z) = \frac{3}{2} z + 2$ e $r(z) = -\frac{5}{2} z - 1$.

2. Si verifichi che il quoziente e il resto della divisione euclidea del polinomio $p(z) = 5z^4 - z^3 + 4z - 1$ per il polinomio $h(z) = z - 1$ sono rispettivamente i polinomi $q(z) = 5z^3 + 4z^2 + 4z + 8$ e $r(z) = 7$.

16. Equazioni algebriche. Radici semplici e multiple.

16.1. Definizione. Se $p(z)$ è un polinomio nel campo complesso (risp. reale) di grado $n \geq 1$, il problema che consiste nel prendere in esame i numeri complessi (risp. reali) z tali che $p(z) = 0$ si chiama *equazione algebrica* nel campo complesso (risp. reale), di grado n e di primo membro il polinomio $p(z)$, e si denota con la scrittura

$$p(z) = 0. \tag{16.1}$$

Ogni numero complesso (risp. reale) z tale che $p(z) = 0$ si dice che *soddisfa all'equazione* (16.1) o anche che è una *soluzione* o una *radice complessa* (risp. *reale*) di tale equazione o anche che è uno *zero* del polinomio $p(z)$.

Dal teorema 15.1 consegue banalmente:

16.2. Teorema di Ruffini. *Sia $p(z)$ un polinomio nel campo complesso (risp. reale), di grado $n \geq 1$, e sia α un numero complesso (risp. reale). Allora $p(z)$ è divisibile per il polinomio $z - \alpha$ se e solo se α è una radice dell'equazione $p(z) = 0$.*

Dimostrazione. In base al teor. 15.1 si ha $p(z)=(z-\alpha)\,q(z)+c$ dove c è una costante. Poiché $p(\alpha)=c$, se $p(z)$ è divisibile per $z-\alpha$, allora $c=p(\alpha)=0$; reciprocamente, se $p(\alpha)=c=0$, $p(z)$ è divisibile per $z-\alpha$.

La seguente definizione dà una classificazione delle radici di un'equazione algebrica.

16.3. Definizione. Siano: $p(z)$ un polinomio nel campo complesso (risp. reale) di grado $n\geq 1$, α un numero complesso (risp. reale), h un intero positivo $\leqslant n$. Si dice che α è una *radice di molteplicità* h dell'equazione $p(z)=0$, oppure che α è uno *zero di molteplicità* h del polinomio $p(z)$, se $p(z)$ è divisibile per $(z-\alpha)^h$ ma non per $(z-\alpha)^{h+1}$. Se α e una radice di molteplicità 1 dell'equazione $p(z)=0$, si dice anche che α è una *radice semplice* dell'equazione $p(z)=0$ oppure anche che è uno *zero semplice* del polinomio $p(z)$.

Il seguente teorema, di cui tralasciamo la dimostrazione[1], è di importanza fondamentale.

16.4. Teorema fondamentale dell'algebra. *Se* $p(z)$ *è un polinomio nel campo complesso, di grado* $n\geq 1$, *l'equazione* $p(z)=0$ *ha almeno una radice complessa.*

Il teorema 16.4 va anche sotto il nome di teorema di Alembert, ma fu Gauss che nella sua dissertazione di laurea pubblicata nel 1799, usufruendo della rappresentazione geometrica dei numeri complessi, per primo forní una dimostrazione rigorosa di tale teorema. Piú tardi, nel 1816, Gauss diede di tale teorema due nuove dimostrazioni, e, nel 1850, un'altra ancora, basata su ragionamenti algebrici.

È appena il caso di avvertire che se $p(z)$ è un polinomio nel campo reale, di grado $n\geq 1$, il teor. 16.4 assicura soltanto che esiste una radice complessa dell'equazione $p(z)=0$ nel campo complesso. Cosí l'equazione $z^2+1=0$ non ha alcuna radice reale, mentre nel campo complesso è dotata delle radici i e $-i$.

17. Decomposizione di un polinomio in fattori di primo grado.

Sia

$$p(z)=a_n z^n+\cdots+a_1 z+a_0 \tag{17.1}$$

[1] Per la dimostrazione si potrà vedere Caccioppoli [3], pagg. 416-418, oppure Fichera [11], pag. 548-551.

un polinomio di grado $n \geq 1$ nel campo complesso, e sia α_1 un suo zero, la cui esistenza è assicurata dal teorema fondamentale dell'Algebra. Se h_1 è la molteplicità di α_1, si ha

$$p(z) = (z - \alpha_1)^{h_1}\, p_1(z)$$

dove $p_1(z)$ è un polinomio di grado $n - h_1$ non divisibile per $z - \alpha_1$. Se $h_1 < n$, ovvero $p_1(z)$ ha grado ≥ 1, $p_1(z)$, sempre in base al teorema fondamentale dell'Algebra, è dotato almeno di uno zero α_2, diverso da α_1, e se h_2 è la molteplicità di α_2 si ha $p_1(z) = (z - \alpha_2)^{h_2}\, p_2(z)$, e quindi

$$p(z) = (z - \alpha_1)^{h_1}\, (z - \alpha_2)^{h_2}\, p_2(z)\ ,$$

dove $p_2(z)$ è un polinomio di grado $n - h_1 - h_2$ non divisibile né per $(z - \alpha_1)$ né per $(z - \alpha_2)$. Se $h_1 + h_2 < n$, ovvero $p_2(z)$ ha grado ≥ 1, si prosegue come prima. Alla fine si giungerà per $p(z)$ ad un'espressione del seguente tipo

$$p(z) = (z - \alpha_1)^{h_1}\, (z - \alpha_2)^{h_2} \cdots (z - \alpha_s)^{h_s} \cdot p_s$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ sono tutti gli zeri del polinomio $p(z)$, a due a due diversi tra loro, di molteplicità rispettive $h_1, \dots, h_s$, e p_s è una costante. A norma del principio di identità dei polinomi deve aversi $h_1 + \cdots + h_s = n$ e $p_s = a_n$. In conclusione:

17.1. Teorema di decomposizione di un polinomio in fattori di primo grado. *Ogni polinomio* $p(z)$ *(17.1) nel campo complesso, di grado* $n \geq 1$, *è dotato di al piú n zeri distinti. Se questi sono i numeri complessi* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, *con* $s \leq n$, *e* $h_1, h_2, \dots, h_s$ *sono le rispettive molteplicità, si ha* $h_1 + h_2 + \cdots + h_s = n$, *e al polinomio* $p(z)$ *si può dare la seguente decomposizione in fattori*[1]

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)^{h_1}\, (z - \alpha_2)^{h_2} \cdots (z - \alpha_s)^{h_s}\ .$$

Se, quando un polinomio $p(z)$ è dotato di uno zero α di molteplicità h, si conviene di dire che $p(z)$ è dotato di *h zeri coincidenti con* α, si ottiene anche

17.2. Teorema. *Ogni polinomio* $p(z)$ *nel campo complesso, di grado* $n \geq 1$, *è dotato di n zeri e n soltanto, distinti o no.*

[1] Una tale decomposizione è evidentemente unica.

In riferimento all'equazione algebrica $p(z)=0$, il teor. 17.2 si può anche formulare dicendo che: ogni equazione algebrica nel campo complesso, $p(z)=0$, di grado $n \geq 1$, ammette n radici e n soltanto, distinte o no, contando ognuna delle radici distinte un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

È utile rilevare che come corollario immediato del teor. 17.1 si ha

17.3. Teorema. *Due polinomi $p(z)$ e $q(z)$ nel campo complesso o nel campo reale, di gradi n e m rispettivamente, che assumano valori uguali per $n+1$ (se $n \geq m$) valori diversi della variabile z, necessariamente sono identici e perciò hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte, infatti, il polinomio differenza $p(z)-q(z)$, di grado $\leq n$, assume valore nullo per $n+1$ valori diversi della variabile z. Esso è quindi il polinomio nullo e $p(z)$ e $q(z)$ sono perciò identici.

Dal teor. 17.1 consegue anche banalmente:

17.4. Teorema. *Se $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sono s numeri complessi distinti, e $h_1, \dots, h_s$ sono s interi positivi, detto n il numero $h_1 + h_2 + \cdots + h_s$, esiste sempre un polinomio di grado n, ed è determinato a meno di un fattore costante, che ammetta i numeri $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ (e essi soltanto) come radici di rispettive molteplicità $h_1, \dots, h_s$.*

18. Polinomi ed equazioni algebriche a coefficienti reali.

Supponiamo che il polinomio nel campo complesso

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 , \tag{18.1}$$

di grado n, abbia coefficienti reali. Allora è facile constatare che se z è un numero complesso e $\bar{z}$ è il suo coniugato, si ha $p(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = \overline{p(z)}$: sicché non appena α è una radice dell'equazione $p(z)=0$, anche la coniugata $\bar{\alpha}$ di α è un radice della stessa equazione. In altri termini, se il polinomio $p(z)$ è divisibile per $z-\alpha$, allora esso è anche divisibile per $z-\bar{\alpha}$, e quindi divisibile per il polinomio di 2^0 grado a coefficienti reali $(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = (z-\lambda)^2 + \mu^2$, se $\alpha = \lambda + i\mu$. È poi evidente che se α è uno zero di molteplicità h, anche il suo coniugato $\bar{\alpha}$ ha la stessa molteplicità, e cosí il polinomio $p(z)$ è divisibile per $[(z-\lambda)^2 + \mu^2]^h$.

Tutto ciò, insieme con il ragionamento seguito per provare la (17.2), conduce ai seguenti risultati:

18.1. Teorema. *Se il polinomio (18.1) nel campo complesso è a coefficienti reali e di grado* $n \geq 1$, *allora, non appena esso ammette uno zero complesso, ammette come zero anche il suo coniugato, con la stessa molteplicità. Conseguentemente, se del polinomio* $p(z)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ *sono gli zeri reali, di molteplicità rispettive* $h_1, \dots, h_u$, *e se* $\lambda_1 \pm i\mu_1, \dots, \lambda_v \pm i\mu_v$ *sono le coppie degli zeri complessi e dei loro coniugati, di molteplicità rispettive* $k_1, \dots, k_v$, *si ha* $h_1 + \dots + h_u + 2(k_1 + \cdots + k_v) = n$ *e il polinomio* $p(z)$ *si può cosí decomporre in fattori di primo e di secondo grado a coefficienti reali*

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)^{h_1} \cdots (z - \alpha_u)^{h_u} [(z - \lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{k_1} \cdots [(z - \lambda_v)^2 + \mu_v^2]^{k_v} .$$

18.2. Teorema. *Ogni polinomio nel campo complesso, a coefficienti reali e di grado dispari, ha almeno uno zero reale.*

Esercizi e complementi.

1. Dato il polinomio $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ nel campo complesso, di grado $n \geq 1$, si denotino con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ gli n suoi zeri, distinti o no, e si scriva la formula di decomposizione (17.2) nella seguente maniera

$$p(z) = a_n(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_n).$$

Si esegua quindi il prodotto indicato e si raggruppino i termini contenenti le potenze di z di eguale esponente. Allora, tenendo presente il principio di identità dei polinomi, uguagliando i coefficienti dei termini di egual grado del polinomio cosí ottenuto e del polinomio di partenza, si ottengono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
&\beta_1 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
&\beta_1\beta_2 + \cdots + \beta_1\beta_n + \cdots + \beta_{n-1}\beta_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\beta_1\beta_2\beta_3 + \cdots + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

che esprimono il legame che sussiste tra le radici dell'equazione $p(z) = 0$ e i suoi coefficienti.

In particolare, nel caso dell'equazione di 2^0 grado

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

si ottengono le note relazioni

$$\beta_1 + \beta_2 = -\frac{a_1}{a_2}\,, \qquad \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{a_0}{a_2}\,.$$

2. Risoluzione di un'equazione algebrica di 2^0 grado.

Se a, b, c sono numeri reali o complessi, consideriamo l'equazione algebrica di 2^0 grado nel campo complesso

$$az^2 + bz + c = 0\,. \tag{18.1}$$

Poiché per ogni numero complesso z si ha

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = \frac{1}{4a}\left[(2az + b)^2 - (b^2 - 4ac)\right]\,,$$

l'equazione (18.1) è equivalente all'altra

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

che ammette come soluzioni i due numeri complessi dati dalla formula

$$z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \tag{18.2}$$

dando alla radice $\sqrt{b^2 - 4ac}$ i due valori, di cui uno è l'opposto dell'altro, che essa assume nel campo complesso. In conclusione, le due soluzioni della (18.1) sono date dalla (18.2), che ne è la formula risolutiva, e coincidono con $-\frac{b}{2a}$ se $b^2 - 4ac = 0$.

Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$ si chiama *discriminante* dell'equazione (18.1) o del polinomio $az^2 + bz + c$, e, se i coefficienti a, b, c sono reali, si ha:

1^0) se è $\Delta > 0$, l'equazione (18.1) ammette le due soluzioni reali e distinte

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,,$$

dove la radice $\sqrt{\Delta}$ è la radice del campo reale del numero reale positivo Δ;

2^0) se è $\Delta < 0$, l'equazione (18.1) ammette le due soluzioni complesse coniugate

$$z = -\frac{b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

dove la radice $\sqrt{-\Delta}$ è la radice nel campo reale del numero reale positivo $-\Delta$;

3°) se è $\Delta = 0$, l'equazione (18.1) ammette la soluzione di molteplicità due

$$z = -\frac{b}{2a}.$$

3. Risoluzione di un'equazione biquadratica.

Se a, b, c sono numeri reali o complessi, di cui $a \neq 0$, l'equazione algebrica di 4° grado nel campo complesso

$$az^4 + bz^2 + c = 0 \tag{18.3}$$

si chiama equazione *biquadratica* e si risolve osservando che essa si può anche scrivere cosí

$$a(z^2)^2 + bz^2 + c = 0 .$$

Per risolvere, questa d'altra parte, basta porre $w = z^2$, risolvere l'equazione di 2° grado

$$aw^2 + bw + c = 0 ,$$

e, in corrispondenza delle due soluzioni w di questa, trovare i 4 numeri complessi z tale che $z^2 = w$. E poiché le due soluzioni w si ottengono dalla formula

$$w = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{18.4}$$

in corrispondenza delle due determinazioni nel campo complesso della radice $\sqrt{b^2 - 4ac}$, le 4 soluzioni della (18.3) si ottengono dalla formula

$$z = \sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{18.5}$$

calcolando nel campo complesso la radice quadrata di ognuno dei numeri (18.4). La formula (18.5) è perciò la formula risolutiva dell'equazione (18.3).

4. Si risolvano nel campo complesso le equazioni biquadratiche

$$z^4 - 1 = 0\ ,\ \ z^4 + 1 = 0\ ,\ \ 3z^4 + 1 = 0\ ,\ \ z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

A titolo di esempio risolviamo la prima. Posto $z^2 = w$, si ha l'equazione $w^2 - 1 = 0$, che ha le due soluzioni $w = 1$ e $w = -1$. Ne consegue che le soluzioni z dell'equazione $z^4 - 1 = 0$ si ottengono risolvendo le due equazioni $z^2 = 1$ e $z^2 = -1$. Esse sono quindi $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ e $z = -i$.

Si osservi che delle equazioni proposte le prime tre sono del tipo $az^4 + b = 0$, la quale è equivalente all'equazione $z^4 = -b/a$, che può essere risolta calcolando nel campo complesso le 4 radici quarte di $-b/a$.

5. Si risolvano nel campo complesso le seguenti equazioni algebriche di terzo grado

$$z^3 + 1 = 0 \ , \ z^3 - 1 = 0 \ , \ 2z^3 + 3 = 0 \, .$$

Risolviamo a titolo d'esempio l'equazione $z^3 + 1 = 0$. Un primo modo per risolvere tale equazione è di scriverla nella formula equivalente $z^3 = -1$ e trovare le tre radici distinte nel campo complesso di -1. Tali radici si ottengono dalla formula

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(1, \pi)} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

per $k = 0, 1, 2,$ e sono $z_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Questo stesso risultato si può ottenere osservando che -1 è una soluzione di $z^3 + 1 = 0$. Per il teorema di Ruffini allora $z^3 + 1$ è divisibile per $z + 1$ e si ha, eseguendo la divisione, $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$. Le altre due soluzioni dell'equazione si ottengono allora risolvendo l'equazione di 2^0 grado $z^2 - z + 1 = 0$, e si riottengono i numeri $z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. Risolubilità per radicali di un'equazione algebrica.

19.1. Definizione. Un'equazione algebrica nel campo complesso si dice *risolubile per radicali* quando le sue soluzioni si possono esprimere mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici effettuate sui coefficienti dell'equazione.

Cosí sono risolubili per radicali le equazioni algebriche di 1^0 e di 2^0 grado, nonché una qualunque equazione algebrica di 3^0 e di 4^0 grado. Per tali equazioni esistono formule risolutive generali nelle quali intervengono solo operazioni razionali e di estrazioni di radici effettuate sui coefficienti. Per brevità non riportiamo qui le formule risolutive delle equazioni di 3^0 e di 4^0 grado, per le quali rinviamo per esempio al volume [3], cap. XIV.

Sono altresí risolubili per radicali alcune equazioni algebriche di grado $n \geq 5$, come l'equazione *binomia*

$$az^n + b = 0 \, ,$$

le cui soluzioni si ottengono dalla formula

$$z = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

calcolando le n radici nel campo complesso del numero $-b/a$. Si dimostra però che:

19.2. Teorema di Ruffini-Abel. *L'equazione algebrica generale nel campo complesso di grado* $n \geq 5$ *non è risolubile per radicali, ossia non esiste una formula risolutiva valevole per tutte le equazioni di grado* $n \geq 5$ *nella quale intervengano solo operazioni razionali e di estrazioni di radici sui coefficienti.*

Questo teorema, di cui riportiamo qui solo l'enunciato, uno dei piú famosi teoremi di matematica, fu dimostrato nel 1824 da uno dei piú geniali matematici di tutti i tempi, il norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829). Una precedente dimostrazione sulla impossibilità di risolvere per radicali l'equazione algebrica *generale* di grado 5 era stata pubblicata nel 1799 dal matematico italiano Paolo Ruffini (1765-1822), ma era passata inosservata.

Pur non esistendo una formula risolutiva generale per tutte le equazioni algebriche di grado $n \geq 5$, potrebbe restare il dubbio che ogni equazione di grado $n \geq 5$ sia risolubile per radicali, variando la formula risolutiva da equazione a equazione. Si verifica però che:

19.3. Teorema. *Per ogni* $n \geq 5$ *esistono equazioni algebriche nel campo complesso di grado* n *non risolubili per radicali.*

È interessante sapere che di tale teorema sussiste la seguente formulazione piú forte:

19.4. Teorema. *Per ogni* $n \geq 5$ *esistono equazioni algebriche a coefficienti razionali che nel campo complesso non sono risolubili per radicali.*