

MINISTERO DELL' ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA

LICEO STATALE "P. E. IMBRIANI"

Linguistico - Scientifico - Scientifico delle Scienze Applicate

Via S. Pescatori, 155 – 83100 Avellino

Tel. (2 linee) 08257821.84 - 86 Fax segreteria 0825783899 ~ Fax dirigenza 082535375

Cod. fiscale: 80011170646 ~ Cod. Istituto: AVPM040007

web-site: www.liceoimbriani.it ~ email: avpm040007@istruzione.it



Unione Europea

FONDI
STRUTTURALI
EUROPEI

pon
2007-2013



MIUR

Con l'Europa investiamo nel vostro futuro!

Teoria degli insiemi

Prof. Roberto Capone

Nozioni fondamentali

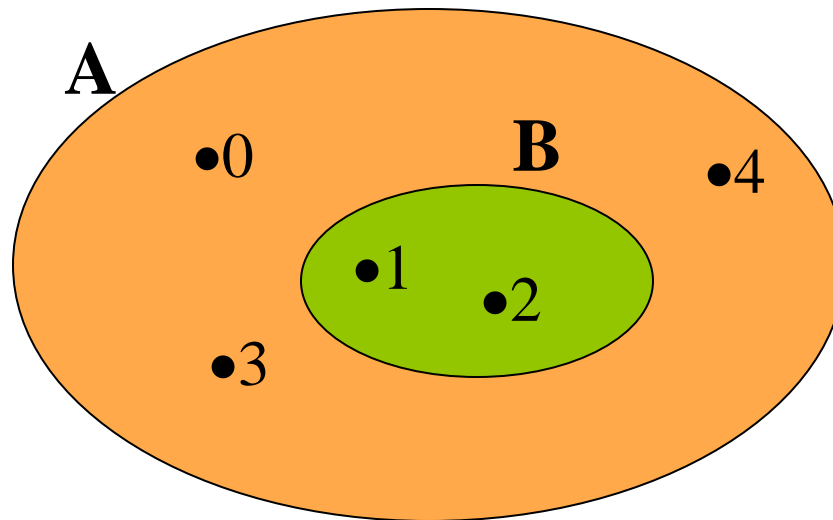
- L'insieme è un concetto primitivo legato alla nostra intuizione.
- Indica una collezione, raggruppamento di oggetti
- Gli elementi di un insieme vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto latino
- L'insieme che non contiene elementi si indica con il simbolo \emptyset

Rappresentazione di un insieme

Un insieme può essere rappresentato in tre modi diversi

- Rappresentazione grafica mediante i diagrammi di Eulero-Venn
- Rappresentazione per elencazione o estensiva o tabulare
- Rappresentazione caratteristica o intensiva

Un insieme può essere contenuto in un altro



Si dice allora che B è un sottoinsieme di A se ogni elemento di B è anche elemento di A e si scrive:

$$B \subseteq A$$

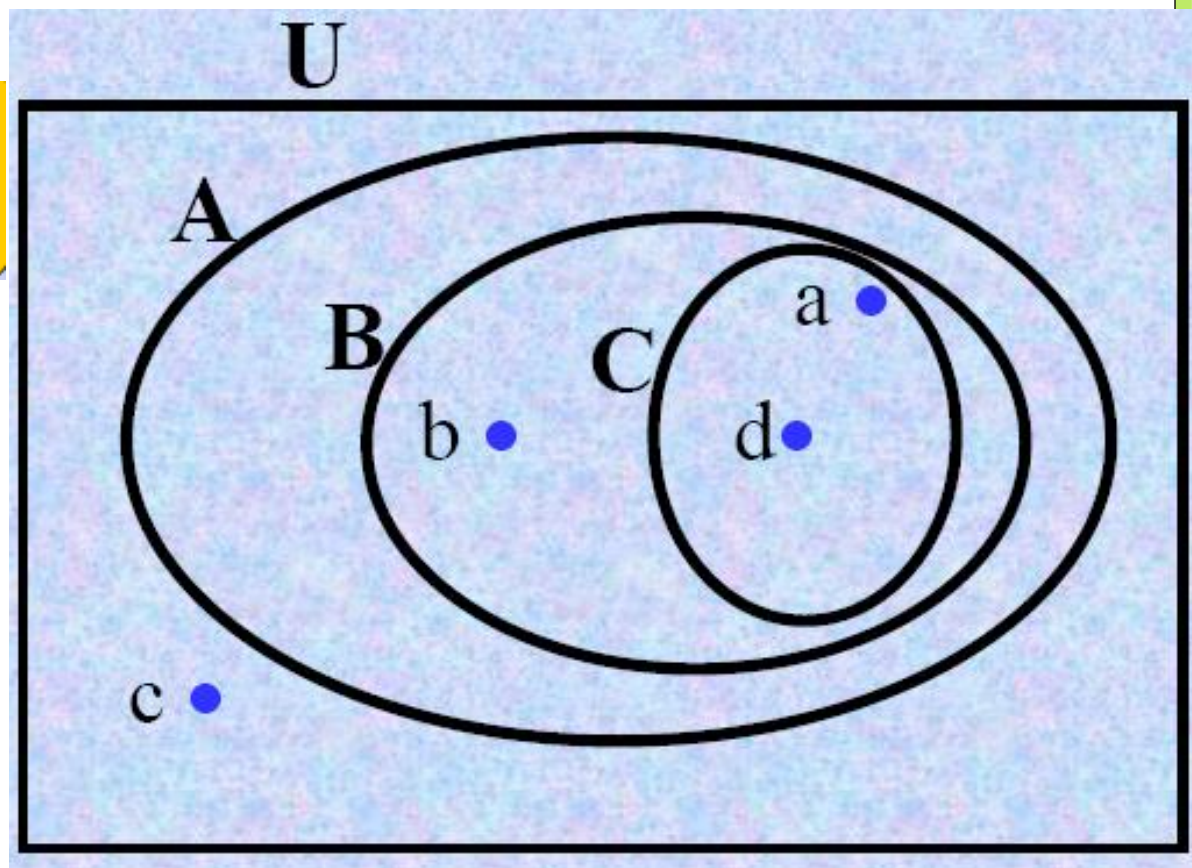
**B è un SOTTOINSIEME
IMPROPRIO di A**

**Ogni insieme è un
SOTTOINSIEME
(IMPROPRIO) di sé stesso**

**L'insieme vuoto è un
SOTTOINSIEME
(IMPROPRIO) di ogni
insieme**

**A è un SOTTOINSIEME
DI U**

**C è un SOTTOINSIEME
DI B**



$$B \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq C, \emptyset \subseteq B, \dots$$

$$A \subseteq A, B \subseteq B, \dots$$

$$A \subseteq U$$

$$C \subseteq B$$

Insiemi numerici

Abbiamo già incontrato alcuni insiemi ovvero dei raggruppamenti di elementi che hanno caratteristiche comuni

N l'insieme dei numeri naturali > 0

N_0 l'insieme dei numeri naturali

Z l'insieme dei numeri interi

Q l'insieme dei numeri razionali

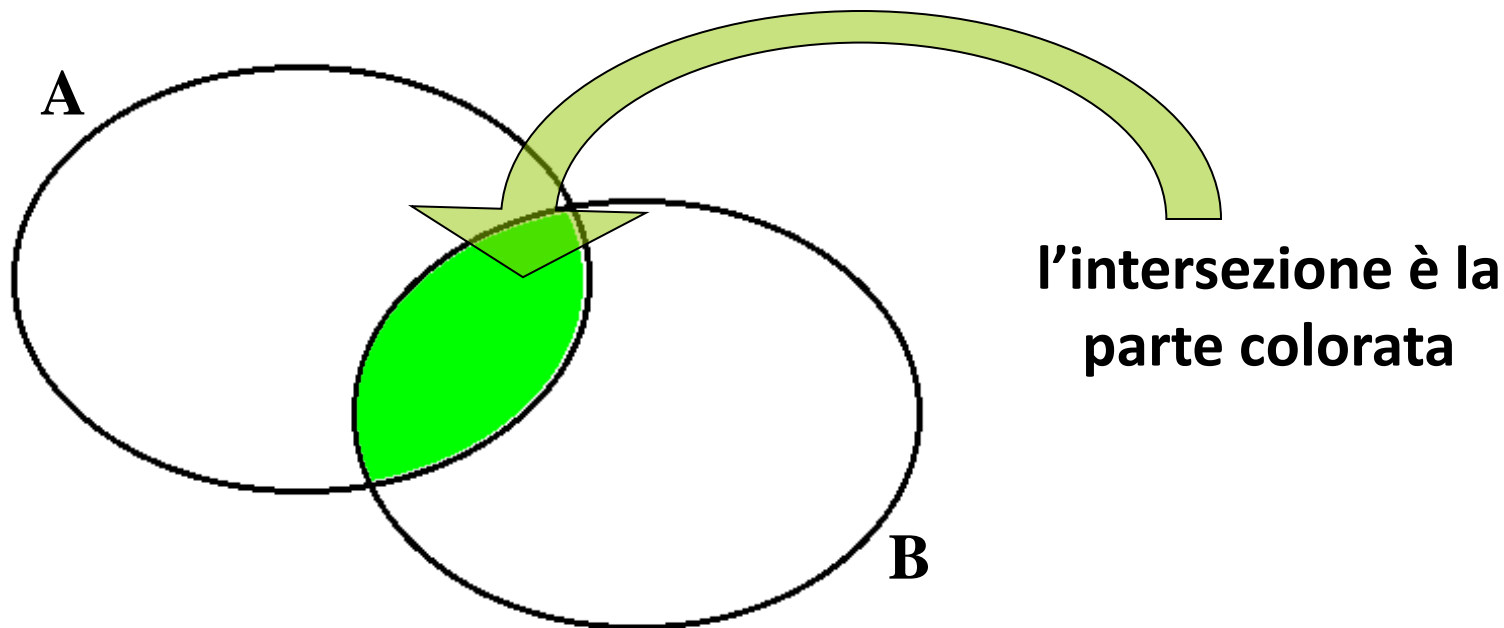
R l'insieme dei numeri reali

C l'insieme dei numeri complessi

Tali insiemi si chiamano anche insiemi numerici

Un insieme privo di elementi si chiama INSIEME VUOTO si indica col simbolo \emptyset

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

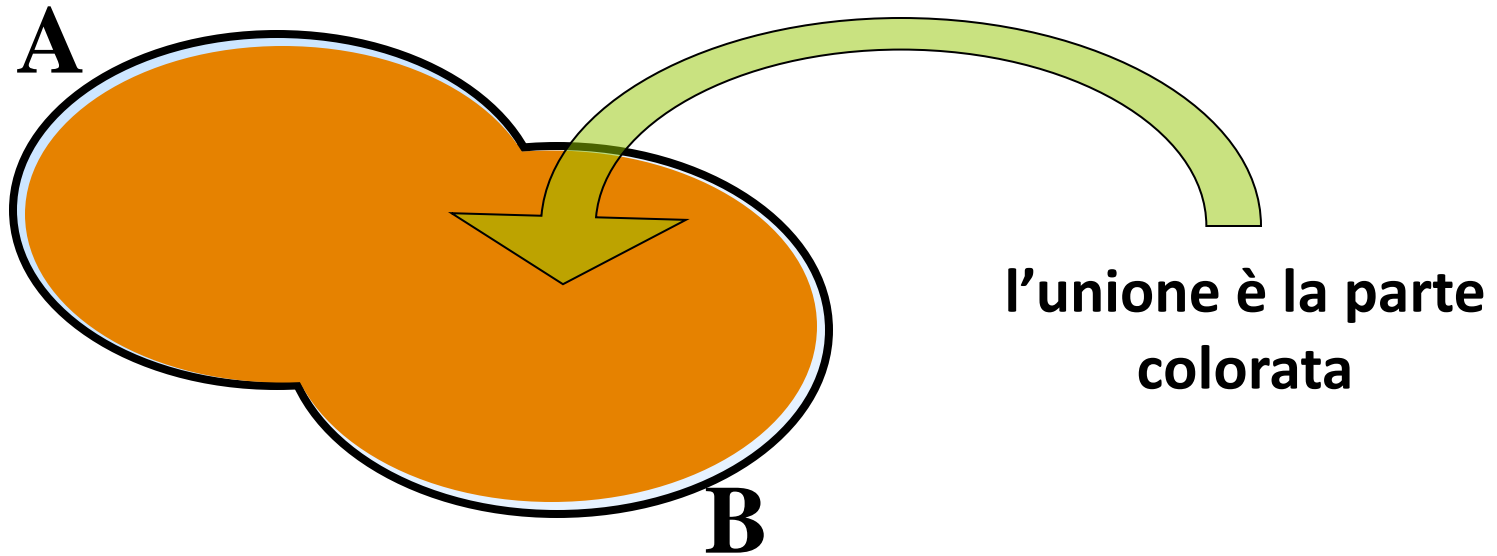
$$A \cap \underline{A} = \emptyset$$

$$A \cap U = A$$

Se $A \cap B = \emptyset$,
A e B si dicono DISGIUNTI

Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

Si definisce **unione** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

CASI PARTICOLARI DELL'UNIONE

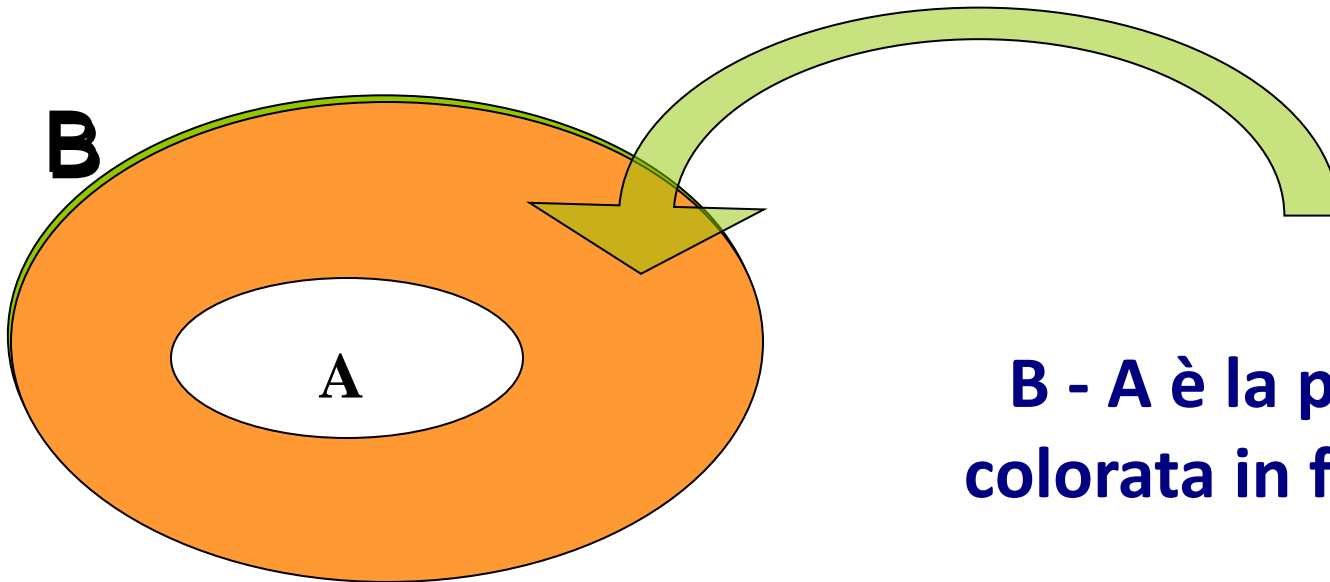
$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \underline{A} = U$$

Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

Si definisce differenza complementare fra due insiemi B ed A l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A.



B - A è la parte colorata in figura.

Si ha, per definizione:

$$**B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}**$$

Si definisce **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B non vuoti l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il 1° elemento \in ad A ed il 2° elemento \in a B .

Dati gli insiemi

$$A = \{2, 4\} \quad B = \{a, f\}$$

$$A \times B = \{(2, a); (2, f); (4, a); (4, f)\}$$

Potenza e cardinalità di un insieme

Dati due insiemi A e B , si dice che A e B sono equipotenti se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi.

Si definisce potenza o cardinalità di un insieme A e si indica con $|A|$ la classe degli insieme equipotenti ad A

Teorema di Cantor, Schroder, Bernstein: se A e B sono insiemi tali che $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ allora $|B| = |A|$

Insiemi finiti

- Un insieme S si dice finito se

$$\exists n \in N_0 \text{ t. c. } |S| = |I_n|$$

dove I_n è un insieme costituito da n numeri naturali

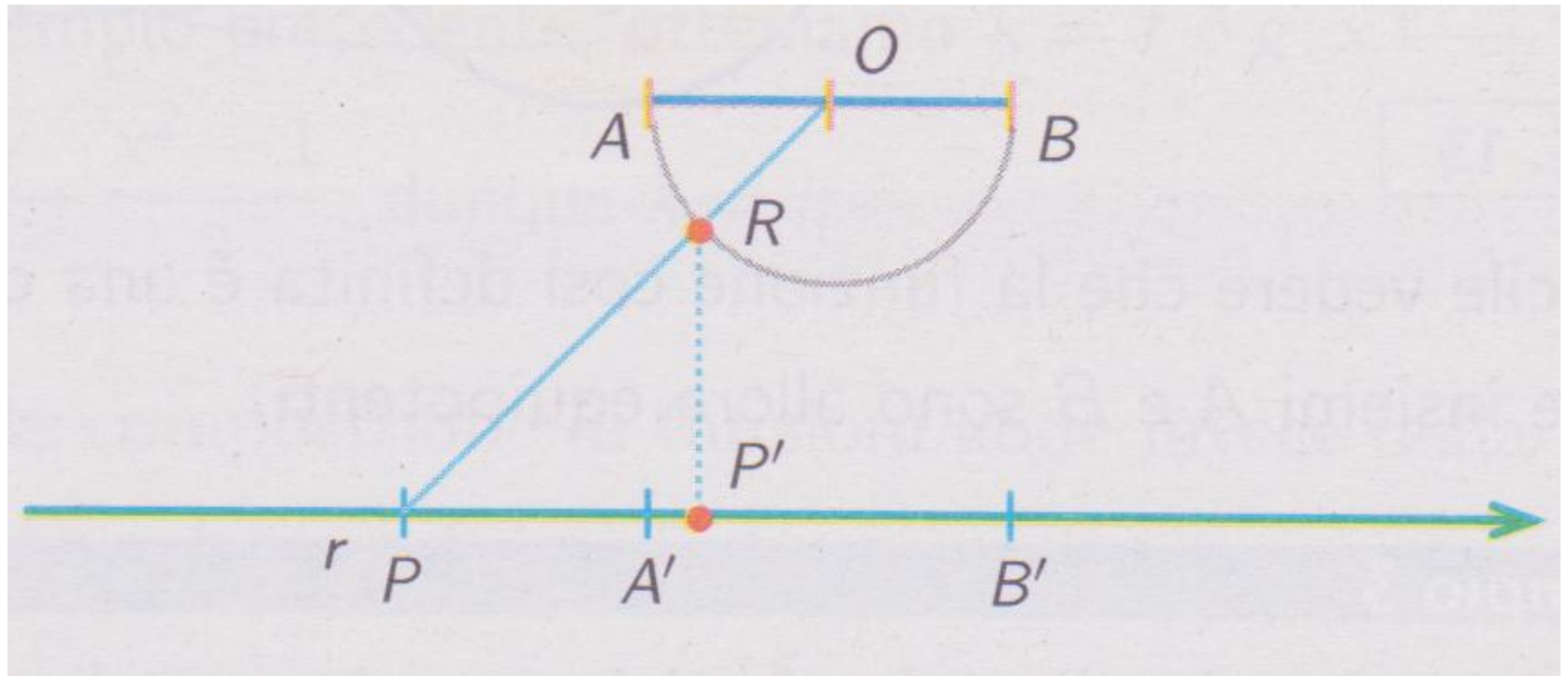
- In caso contrario l'insieme si dice infinito
- L'insieme N_0 è infinito
- La cardinalità di N_0 si dice cardinalità del numerabile e la si indica con la prima lettera dell'alfabeto ebraico

$$|N_0| = \aleph_0$$

Esercizio

- Si dimostri che l'insieme dei punti di una retta e l'insieme dei punti di un segmento aperto hanno la stessa cardinalità

Un piccolo aiuto



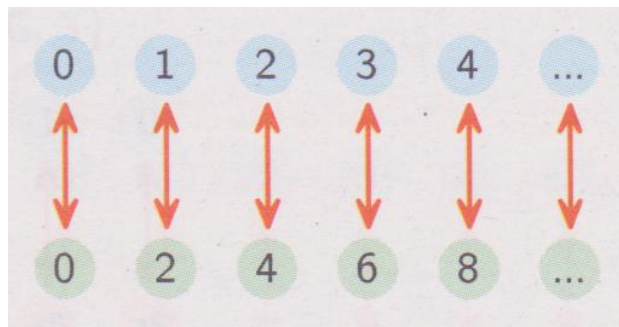
I numeri naturali

Assiomi di Peano

- A1 0 è un numero naturale
- A2 il successore di ogni numero naturale è un numero naturale univocamente determinato
- A3 0 non è il successore di nessun numero naturale
- A4 i numeri naturali con successori uguali sono uguali
- A5 se un insieme A di numeri naturali contiene 0 e se, ogni volta che un numero naturale appartiene ad A , ad A appartiene anche il suo successore, allora A coincide con l'insieme di tutti i numeri naturali

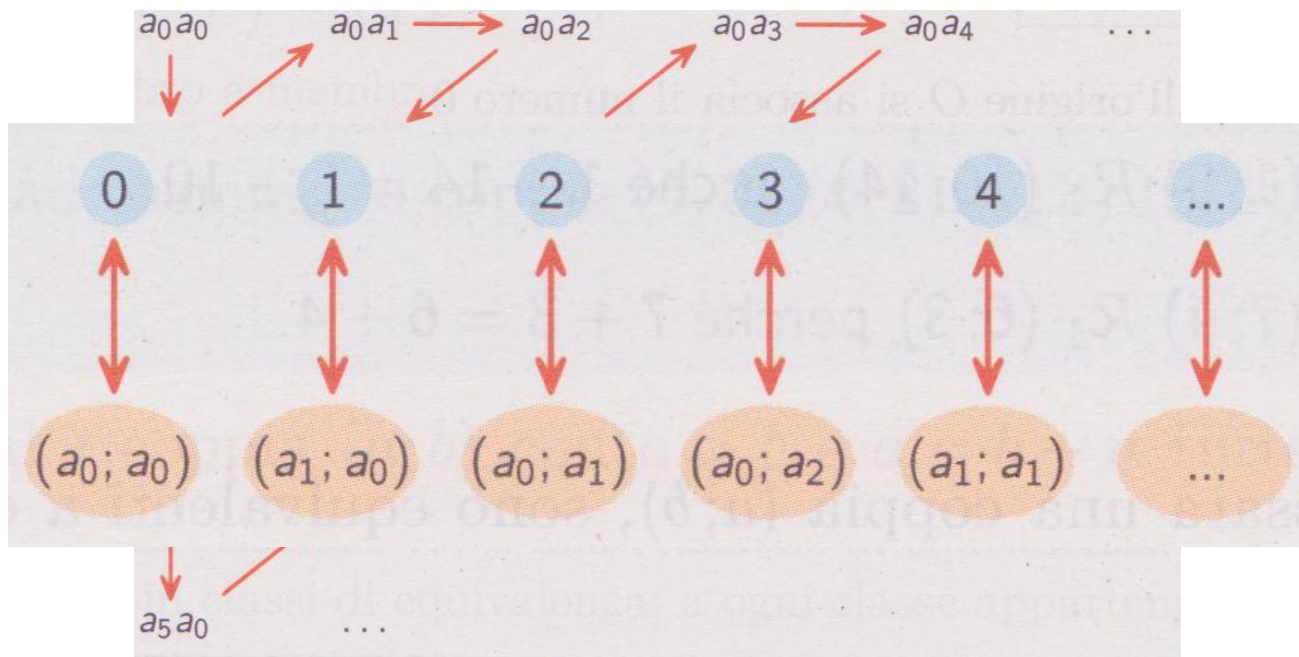
Caratteristiche di \mathbb{N}

- L'insieme \mathbb{N} è numerabile
- Un insieme è infinito se è equipotente a un suo sottoinsieme proprio
- Se P è l'insieme dei numeri naturali \mathbb{P} , P è equipotente ad \mathbb{N}
- Ogni insieme A si dice numerabile sse può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali



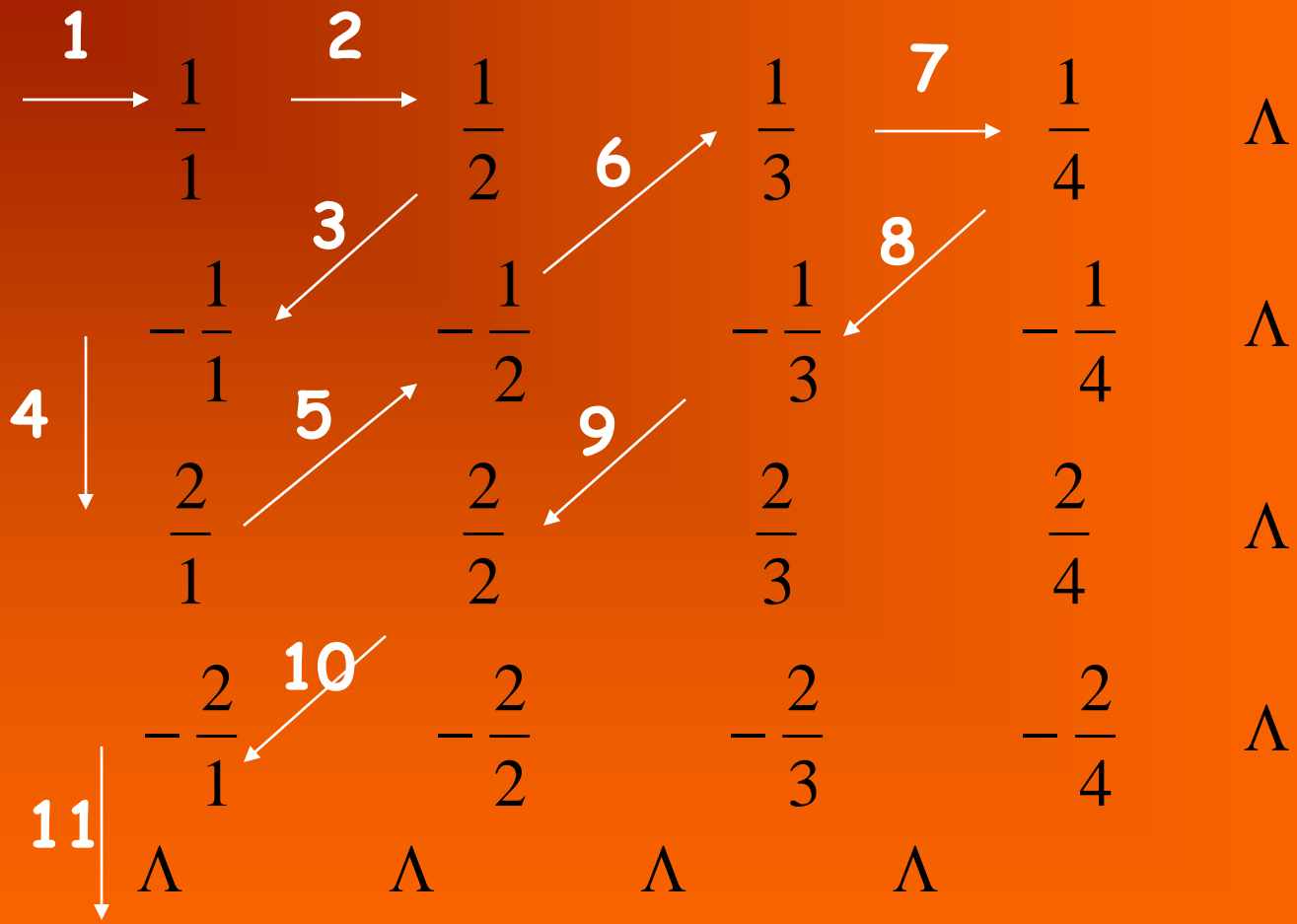
Cardinalità del prodotto cartesiano

- Poiché A è numerabile i suoi elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali
Partendo dalla coppia ordinata $(a_0; a_0)$ posso costruire la seguente associazione
numeri naturali



Cardinalità di \mathbb{Q}

- Quanti sono gli elementi di \mathbb{Q} ?
- Cantor ha dimostrato in maniera ingegnosa che l'insieme dei razionali è numerabile
- Data “la densità” dei razionali può sembrare impossibile che i due insiemi abbiano la “stessa dimensione”, ma Cantor dimostrò che basta “disporli e contarli” nel modo seguente:



Sul quinto assioma di Peano

- Per dimostrare che se la proprietà P vale per tutti i numeri naturali n è sufficiente dimostrare che:
- La proprietà P vale per $n=0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$, se la proprietà vale per $n-1$ allora P vale anche per il numero n

To be continued