

# PROGRAMMA DEL CORSO DI MATEMATICA II

CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MECCANICA/GESTIONALE (E-O) – A.A. 2020/21

Prof. Roberto CAPONE

## Algebra lineare

Introduzione all'algebra lineare. I vettori numerici, dipendenza lineare di vettori numerici, matrici e prime proprietà: matrice simmetrica, emisimmetrica, trasposta, determinante di una matrice  $2 \times 2$ , determinante di una matrice  $3 \times 3$ , regola di Sarrus, regola di Laplace. Matrice identità, matrice inversa (condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità). Operazioni tra matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne e proprietà. Proprietà dei determinanti, inversa di una matrice, calcolo del determinante con l'algoritmo di Gauss, rango di una matrice, teorema degli orlati, rango di una matrice a scalini. Sistemi lineari, teorema di Rouché-Capelli, sistemi di Cramer, esempi di sistemi compatibili e impossibili, sistemi omogenei. Autovalori e autovettori di una matrice, traccia e polinomio caratteristico, molteplicità algebrica e geometrica; autospazio, base di un autospazio, diagonalizzazione, caratterizzazione della diagonalizzazione. Spazi vettoriali, prime proprietà, **dipendenza lineare di vettori**, generatori, base di uno spazio vettoriale, **teorema della base**, sottospazio, **teorema di esistenza di una base**, dimensione, dimensione e rango, **teorema della dimensione**, operazioni tra sottospazi: sottospazio intersezione. Sottospazio somma; somma diretta, formula di Grassman; spazi vettoriali euclidei, sottospazio ortogonale.

## Geometria analitica nel piano e nello spazio

Geometria analitica nello spazio: nozione di riferimento cartesiano nello spazio; Equazioni parametriche di una retta, Equazione cartesiana di un piano, Intersezione e parallelismo di due piani, Equazioni cartesiane di una retta, Parallelismo di una retta e un piano. Applicazioni: trovare le equazioni cartesiane e parametriche di una retta per due punti; verificare che tre punti sono allineati; trovare l'equazione di un piano per tre punti; trovare l'equazione di una retta per un punto e parallela a una retta data; trovare l'equazione di un piano parallelo a un altro; trovare l'equazione di un piano passante per una retta e per un punto; trovare l'equazione di una retta per un punto, parallela a un piano e incidente un'altra retta; trovare l'equazione di una retta per un punto e perpendicolare a un piano; trovare l'equazione di un piano per un punto e perpendicolare a una retta; trovare l'equazione di una retta per un punto e incidente due rette date. Condizioni di perpendicolarità nello spazio; Distanza di un punto da un piano, Distanza di un punto da una retta, Distanza di due rette. Applicazioni: trovare l'equazione di una retta per un punto perpendicolare e incidente un'altra retta; trovare l'equazione di un piano passante per una retta data e parallelo a un'altra retta data; verificare che due rette siano coplanari e trovare l'equazione del piano che le contiene; trovare l'equazione di una retta perpendicolare e incidente entrambe due rette date; trovare la minima distanza tra due rette sghembe. La circonferenza, la parabola, l'ellisse e l'iperbole nel piano. La sfera.

## Funzioni di due variabili reali

Elementi di topologia in  $\mathbb{R}^n$ ; **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**. Insiemi connessi di  $\mathbb{R}^n$ . Funzioni reali di più variabili reali; diagramma di una funzione reale di più variabili reali; estremi, minimi e massimi assoluti e relativi. Funzioni vettoriali.

Curve nel piano cartesiano. Campo di esistenza per le funzioni di due variabili reali. Curve di livello.

Limiti e continuità per le funzioni reali di più variabili reali; infinitesimi, infiniti e loro ordine; lemma fondamentale sulla caratterizzazione delle funzioni continue; **continuità delle funzioni composte**; teorema di Bolzano; teorema di Weierstrass; teorema di Weierstrass (modificato); teorema degli zeri; teorema di Cantor.

Calcolo differenziale per le funzioni reali e vettoriali di più variabili reali; nozione di differenziale per una funzione reale di più variabili reali; **(condizione sufficiente per la differenziabilità data attraverso la continuità delle derivate parziali) Teorema del differenziale**; operazioni sulle funzioni differenziabili. Le derivate parziali e loro significato geometrico; derivabilità. Nozione di derivata direzionale.

Derivate parziali di ordine superiore; **teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione**; teorema di Lagrange per le funzioni reali di più variabili reali; funzioni con derivate parziali identicamente nulle. Differenziabilità. **Relazione tra continuità e differenziabilità; formula del gradiente**; significato geometrico del gradiente

Valori di massimo e di minimo; massimi e minimi locali; **teorema di Fermat** (condizione necessaria del I ordine); **funzioni con gradiente nullo**; teoremi sui minimi e massimi relativi per le funzioni di più variabili. Regolarità degli insiemi di livello; baricentro e momento d'inerzia. Hessiano nullo. Massimi e minimi su domini chiusi. Calcolo dei massimi e minimi relativi per le funzioni di più variabili reali; test dell'hessiana. Metodo dei moltiplicatori, teorema dei moltiplicatori di Lagrange e suo significato geometrico; funzioni convesse e concave.

## Curve e integrali curvilinei

---

Curve piane e sghembe: curve semplici aperte; curve semplici chiuse; curve semplici piane rappresentate in coordinate polari; orientamento delle curve semplici, aperte o chiuse; curve semplici regolari; curve semplici rettificabili; sistema di ascisse curvilinee su una curva semplice. Lunghezza di un arco di curva; lunghezza di un arco di curva piana semplice e regolare; l'elica cilindrica; la cicloide; la spirale di Archimede; la spirale logaritmica. Orientazione di una curva; Teorema di rettificabilità; curve equivalenti; **teorema sulla lunghezza di curve equivalenti**. Integrali curvilineo di una funzione di due o di tre variabili. **Indipendenza dell'integrale curvilineo dalla parametrizzazione della curva**;

Relazione tra integrale doppio e curvilineo; **formule di Gauss-Green nel piano**. Applicazioni delle formule di Gauss-Green; Criterio di esattezza delle forme differenziali negli aperti semplicemente connessi; **Calcolo di aree di domini piani**

## Integrali multipli

---

Somme di Riemann; convergenza delle somme di Riemann; definizione di integrale doppio; calcolo di integrali doppi su rettangoli; formule di riduzione degli integrali doppi; proprietà dell'integrale doppio; integrazione su regioni semplici; integrazione su domini non semplici. Applicazioni dell'integrale doppio: la densità; il centro di massa (baricentro); momenti d'inerzia. Cambiamento di variabili negli integrali doppi: teorema del cambiamento di variabili; teorema del passaggio a coordinate polari.

---

---

Integrali tripli, formule di riduzione per fili e per strati. Cambiamento di variabili negli integrali tripli: coordinate cilindriche e coordinate sferiche. Calcolo dei volumi.

---

**Forme differenziali**

Forme differenziali lineari; **indipendenza dalla parametrizzazione**; forme differenziali su curve generalmente regolari; teorema fondamentale per gli integrali curvilinei; forme differenziali esatte; **formula fondamentale per gli integrali curvilinei di forme esatte**; forme differenziali chiuse; domini connessi; **caratterizzazione delle forme differenziali esatte**; insiemi stellati; **chiusura ed esattezza**; domini semplicemente connessi; forme differenziali in aperti stellati; **forme differenziali in aperti semplicemente connessi**; campi vettoriali; lavoro di una forza; circuitazione; l'operatore nabla; gradiente, divergenza e rotore; campi conservativi; caratterizzazione dei campi conservativi.

---

**Equazioni differenziali**

Equazioni differenziali in forma normale. Tecniche di soluzione per equazioni differenziali del primo ordine. Esempi di equazioni differenziali, terminologia, soluzione generale, problema di Cauchy, forma normale, equazioni del primo ordine a variabili separabili, equazioni del primo ordine in forma normale con  $f(x, y)$  combinazione lineare di  $x$  e  $y$ . Equazioni omogenee con  $f$  funzione del rapporto  $y/x$ . Equazioni differenziali lineari non omogenee - Fattore integrante - Bernoulli - Equazioni differenziali ordinarie del II ordine a coefficienti costanti. Metodo di risoluzione per somiglianza, metodo di risoluzione con la variazione delle costanti arbitrarie, soluzioni particolari secondo in caso di termini noti di tipo polinomiale, trigonometrico ed esponenziale - Wronskiano - Problemi di Cauchy - **Teorema di esistenza e unicità in grande. Teorema di esistenza e unicità in piccolo.**

---

**Superfici e integrali superficiali**

Superfici; superfici di rotazione; esempi di superfici e loro rappresentazione parametrica (il piano, la calotta sferica; il paraboloido ellittico, il paraboloido iperbolico, ellissoide); superfici regolari; piano tangente; superfici orientabili (il nastro di Moebius e la bottiglia di Klein); integrali superficiali di I specie; flusso di un campo vettoriale; applicazioni meccaniche (baricentro, momento d'inerzia); **teorema della divergenza nel piano**; teorema del rotore. Applicazioni in fisica.

---