

# Laboratorio con le macchine matematiche

## *Analizziamo la Pascalina!*

Francesca Martignone [francesca.martignone@unipmn.it](mailto:francesca.martignone@unipmn.it)

Cristina Coppola [ccoppola@unisa.it](mailto:ccoppola@unisa.it)

Laura Lombardi [llombardi@unisa.it](mailto:llombardi@unisa.it)

Tiziana Pacelli [tpacelli@unisa.it](mailto:tpacelli@unisa.it)



# **Come analizzeremo la Pascalina?**

Focus su aspetti  
storico-epistemologici,  
cognitivi e didattici

# Origini

Le calcolatrici meccaniche si diffusero in Europa a partire dal XVII secolo, quando era ormai noto (anche se non sempre utilizzato nella pratica)

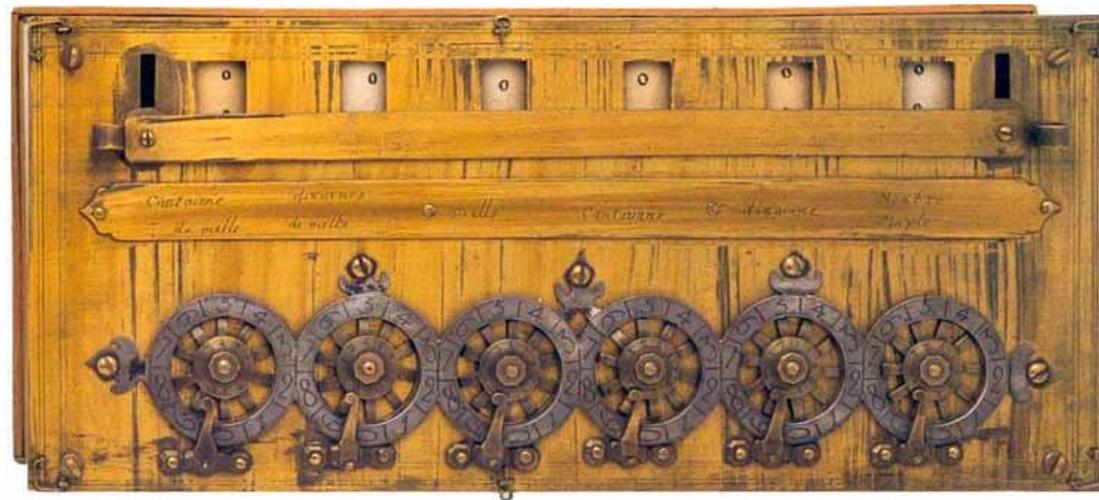
**il sistema di notazione posizionale**



È necessario sottolineare che uno strumento è sempre **il risultato di un'evoluzione culturale**, prodotto per scopi specifici e, conseguentemente, incorpora idee

# Un po' di storia...

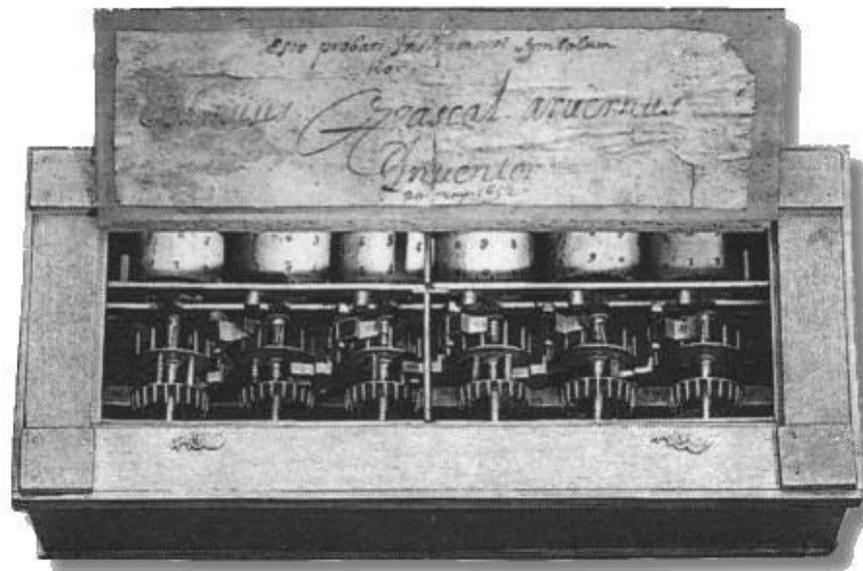
Blaise Pascal mise a punto una **macchina da calcolo** che eseguiva addizioni e sottrazioni utilizzando una serie di ruote dentate analoghe a quelle utilizzate negli orologi dell'epoca





La Pascalina è stata una delle prime macchine da calcolo in grado di effettuare addizioni e sottrazioni con il **riporto automatico** delle unità

Il primo esemplare di “pascalina” fu costruito da Pascal per aiutare il padre, funzionario delle imposte a gestire la propria contabilità.



Pascal quando descrive la sua invenzione nella lettera di dedica a Monsignor il Cancelliere del 1645

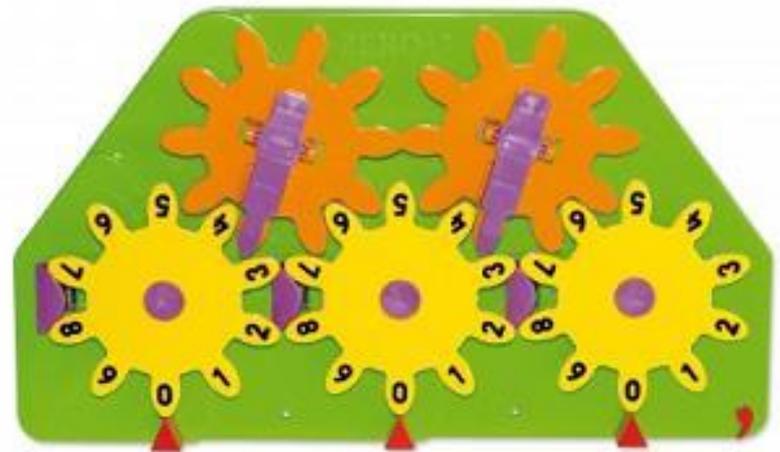
*“Le lungaggini e le difficoltà degli strumenti di cui ci serviamo normalmente per i calcoli, mi hanno indotto a pensare a un aiuto più veloce e più semplice, anche per le mie esigenze personali, al fine di alleggerirmi nei grandi calcoli in cui sono occupato da qualche anno, a causa dei molti obblighi del lavoro con cui avete voluto onorare mio padre, al servizio di Sua Maestà, in Normandia.”*



Nella presentazione della sua macchina Pascal scriveva:

*“Tu mi sarai grato dell’impegno di cui mi son fatto carico per fare in modo che tutte le operazioni che con i metodi precedenti erano penose, complicate, lunghe e mai sicure diventassero ora facili, semplici, veloci e affidabili”.*

“pascaline” Zero+1  
(ispirate all’artefatto storico)





# **Cosa faremo oggi**

Esplorazione della Pascalina,  
analisi e discussione di  
possibili conseguenze

# Metodologia

## **Laboratorio di matematica**

“imparare facendo e  
vedendo fare,  
comunicando tra pari e  
con gli esperti”

# Domande chiave

**1. Come è fatta la macchina?**

**2. Cosa fa la macchina?**

**3. Perché?**

**Dalla produzione di congetture allo sviluppo di argomentazioni che legano la struttura e movimento della macchina con la matematica in essa “incorporata”**



Seguendo gli studi di Rabardel (1995, 1997, 2000), per analizzare i processi che si sviluppano ed evolvono nelle attività con artefatti può essere utile distinguere tra ***artefatto e strumento***

# Distinguiamo la nozione di artefatto da quella di strumento

*Lo strumento è l'artefatto unito alle modalità del suo uso, così come sono viste e interpretate da un utente in base alla sua cultura e alla sua esperienza. (Rabardel e Verrillon, 1995)*

Lo strumento esiste quindi solo nella prospettiva dell'uso di un artefatto da parte di un individuo.

Un **artefatto** è un oggetto materiale con caratteristiche fisiche e strutturali proprie, realizzato per perseguire scopi specifici incorporando conoscenze, risultato di una evoluzione culturale

Da Rabardel (1997):

*Uno **strumento** è dunque formato da due componenti:*

- a) un artefatto, materiale o simbolico, prodotto dal soggetto o da altri;*
- b) uno o più schemi d'uso associati, risultanti da una costruzione propria del soggetto, autonomi o dipendenti da schemi sociali d'uso già precedentemente formati.*

Rabardel, P. : 1997, “Gli strumenti dell’uomo: dal progetto all’uso”, *Ergonomia*, 9

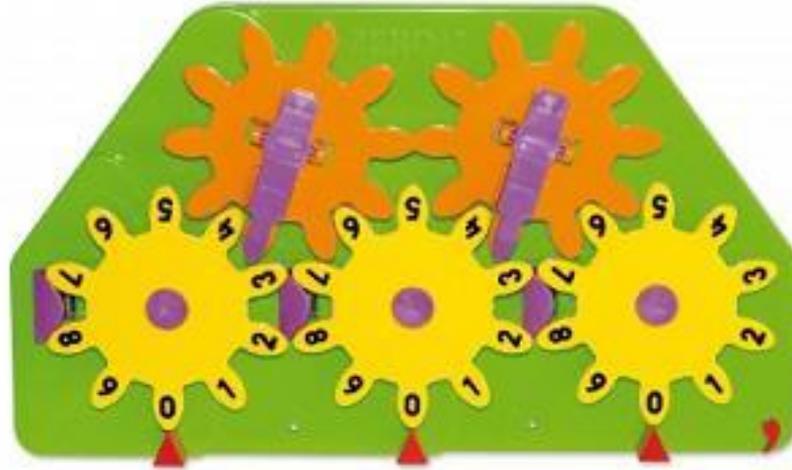


Lo strumento non è un oggetto permanente, ma qualcosa che evolve sul piano soggettivo.

Pertanto le attività didattiche dovranno favorire una **evoluzione degli *schemi d'utilizzo*** dello strumento da parte degli studenti e dei significati associati ad essi (in relazione al compito che viene affrontato).

# Come è fatta?

- Le componenti della macchina
- Le relazioni tra queste
- I possibili movimenti
- ...



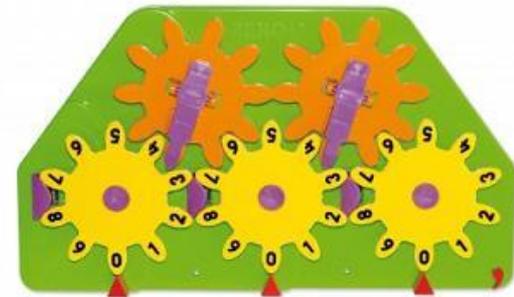
## Come è fatta la macchina:

La Pascalina è costituita di cinque ruote dentate.

Ognuna è divisa in dieci settori o denti.

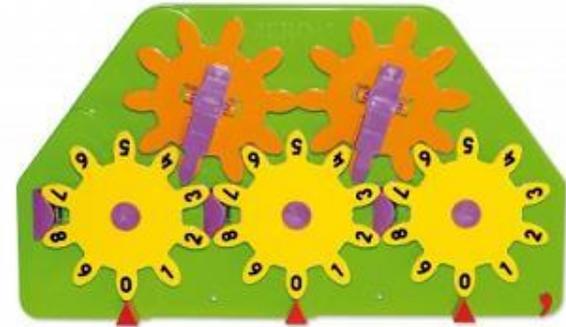
Sulle tre ruote in basso (“ruote significative”) sono indicate le cifre dallo 0 al 9 del sistema decimale.

Le due ruote in alto sono ruote ausiliarie (ruote di trasmissione) che consentono, per mezzo delle barrette ad esse vincolate, di trasmettere il moto da una ruota all'altra.



# Cosa fa?

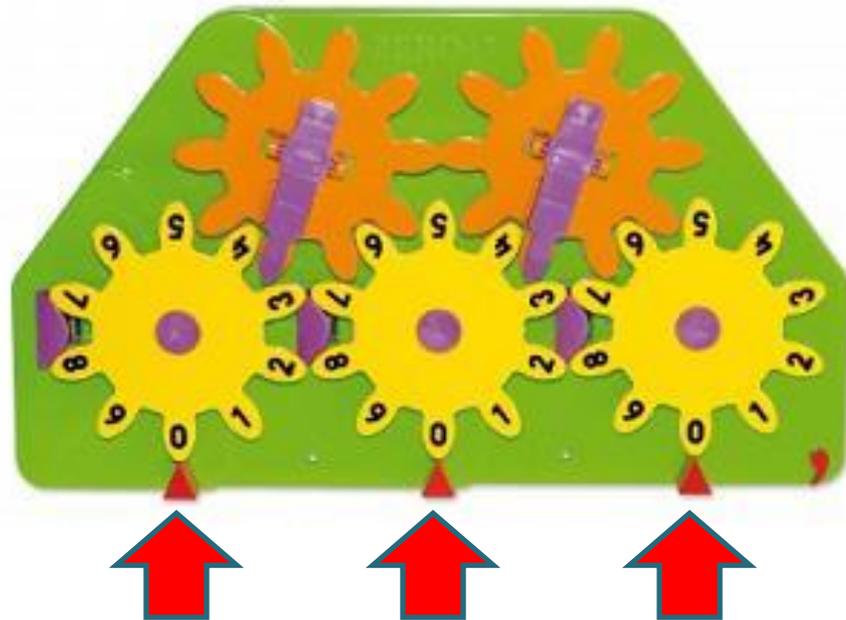
- Come si usa?
- A cosa serve?
- Schemi d'utilizzo in relazione alle diverse consegne.



# Schemi d'utilizzo

## orientati verso la gestione dello strumento

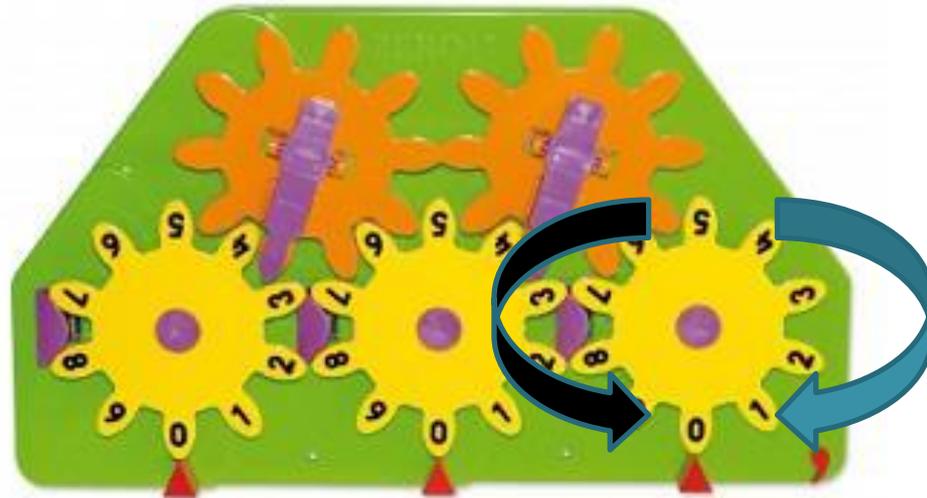
- Muovere le ruote numerate in senso orario/antiorario
- leggendo i numeri che scorrono indicati dalla freccia rossa ...



# Schemi d'utilizzo

## orientati verso la gestione dello strumento

- Muovere le ruote numerate (gialle) in senso antiorario/orario → ...



- Muovere ruote cominciando da destra → ....
- Muovere ruote cominciando da sinistra → ...
- Muovere le ruote senza numeri (arancioni) → ....

# Schemi d'azione

**orientati a svolgere un compito specifico**

Ad esempio **rappresentare un numero**:

- Schema 1: Partendo da 000, muovere la ruota di sinistra in senso orario facendogli fare tanti scatti quanti il numero richiesto
- Schema 2: Se il numero è di due o più cifre, comporre il numero scomponendolo in centinaia, decine, unità e rappresentare queste sulle ruote corrispondenti (schema 1)
- Schema 3: combinazione di addizione e sottrazione (completamento)

# Cosa fa la macchina:

## Rappresentazione di numeri naturali

Nella Pascalina un numero è rappresentato mediante una terna di cifre:

- la ruota a destra indica le unità;
- la ruota centrale indica le decine;
- la ruota a sinistra indica le centinaia.

Analogie e differenze con altri strumenti di calcolo



# **Cominciamo ad usare la Pascalina**

Scheda di lavoro

1. Descrivere in modo accurato il procedimento svolto, motivando le scelte fatte.

### 1.1. Rappresentare sulla Pascalina

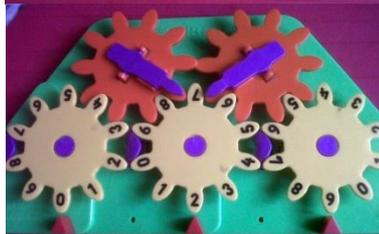
- il numero 5



- il numero 11



- il numero 29



- il numero 302 ....

- il numero 998 ....

1.2 Usate la Pascalina per svolgere le seguenti operazioni:

- a)  $3+4$
- b)  $11+9$
- c)  $59+31$
- d)  $155-6$
- e)  $301-199$

2. Come avete usato la Pascalina (per formare i numeri e per fare le operazioni)? Quali caratteristiche della macchina avete sfruttato? In che modo? Quali conoscenze matematiche avete messo in gioco?

Usate la Pascalina per svolgere le seguenti operazioni:

2.

3. 50

Rete di strumenti  
(Pascalina, mani, fogli,...)  
schemi d'utilizzo e proprietà  
delle operazioni

numeri e  
caratter  
che mo  
messo in gioco

ma  
avete  
tato? In  
matemati  
e avete

# Cosa fa la macchina?

Operazioni di addizione e sottrazione

Diversi modi di **sommare** due numeri:

- operando solo sulla ruota delle unità
- operando sulle diverse ruote, girando in senso **orario** a partire da ...

Diversi modi di **sottrarre** due numeri:

- operando solo sulla ruota delle unità
- operando sulle diverse ruote, girando in senso **antiorario** a partire da ...

# Significati matematici coinvolti

Addizione (definizione e proprietà)

- L'addizione è definita ricorsivamente
- L'addizione per decomposizione
- L'addizione per completamento
- Elemento neutro dell'addizione
- Proprietà commutativa dell'addizione
- Proprietà associativa dell'addizione

# Significati matematici coinvolti

Sottrazione (definizione e proprietà)

- La sottrazione è definita ricorsivamente
- La sottrazione per decomposizione
- La sottrazione per completamento
- Elemento neutro della sottrazione
- Non commutativa della sottrazione
- Non associativa della sottrazione

# Operazioni di addizione e sottrazione

**Sulla Pascalina è favorito il collegamento tra le due operazioni di addizione e sottrazione.**

**E poi moltiplicazione e divisione ...**

# La divisione...

$$35 : 12 = ?$$



Nella divisione gli schemi d'utilizzo sono gli stessi che nel caso delle altre operazioni?

Che significato ha il numero che si ottiene?

- Divisione come sottrazione ripetuta
- Divisione euclidea (significato di resto)

# Numeri complementari

- Hai al massimo 3 scatti. Rappresenta il numero 98.

[Dalla posizione 000 si può con uno scatto portare la rotella delle centinaia sull'1 e ottenere il numero 100, e poi con due scatti girare in senso antiorario la rotella delle unità di 2 scatti per ottenere 99 e poi 98.]

- Hai al massimo 3 scatti. Rappresenta il numero 8.

....

# Perché lo fa?

- In che modo la macchina garantisce lo svolgimento delle operazioni?
- Con quale teoria matematica possiamo giustificare il suo funzionamento?

# Matematica “incorporata”

## Notazione posizionale

Ogni numero naturale può essere scritto come combinazione lineare di potenze di dieci, utilizzando come coefficienti della combinazione le dieci cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$n = a_k 10^k + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Ovvero, scritto velocemente :

$$n = a_k \dots a_2 a_1 a_0$$

# Matematica “incorporata”

## Assiomi di Peano (numeri naturali)

- In  $\mathbb{N}$  c'è un elemento indicato con il simbolo 0 (zero).
- Esiste una funzione biunivoca o operatore (detta *successivo*)
- $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
- La funzione inversa si chiama ‘precedente’.
- Tali funzioni sono spesso richiamate con il simbolo: ‘+1’ e ‘-1’.
- $\mathbb{N}$  è infinito ed equipotente ad un sottoinsieme proprio (per la definizione di Dedekind).

# Altri esempi di consegne

- Cosa succede se faccio  $999 + 1$ ? Perché?
- Quale risultato ottengo se faccio  $0-1$ ?
- Si può fare l'operazione  $8-3$  girando le ruote **SEMPRE in senso orario**? Se sì, perché; se no, perché?
- .....

# **Un esempio di percorso didattico**

**Insegnante Franca Ferri**  
**Scuola Primaria Modena**

Dalla presentazione per il  
convegno UMI-CIIM 2006



# Confronto di schemi d'utilizzo

Classe IV

# Consegna individuale

$$28 + 14$$

Christian

*Ho scritto il primo addendo, 28, poi ho aggiunto il secondo, ruotando in senso orario la rotella delle unità quattro volte e la rotella delle decine una sola volta. Il risultato è 42.*

Orlando

*Ho scritto il numero 28, poi ho girato in senso orario 14 volte la ruota in basso a destra, quella delle unità. Il risultato è 42.*

**Prova a scrivere le espressioni matematiche che rappresentano i due diversi procedimenti.**



In gioco ci sono :

- Linguaggio verbale
- Linguaggio matematico
- Schemi d'utilizzo della pascalina

**Il compito degli studenti è di coordinare  
diversi registri di rappresentazione  
facendo riferimento alle azioni  
compiute sulla Pascalina**



# **Schemi d'utilizzo → linguaggio matematico**

Alcuni esempi di protocolli



## Esempio: protocollo II

Christian

$$= (20 + 10) + (4 + 8) =$$

$$= 30 + 12 =$$

$$= 42$$

Orlando

$$= (20 + 8) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) =$$

$$= 20 + (8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) =$$

=

$$= 20 + 22 =$$

$$= 42$$

# Significati matematici

- Rappresentazione dei numeri usando il sistema posizionale
- Proprietà delle operazioni
- Regole di sviluppo delle operazioni

# Aspetti importanti

- Produzione e argomentazione di procedure
- Attività semiotica
- Comprensione di ragionamenti altrui
- Confronto di risoluzioni diverse
- Uso del linguaggio matematico per mettere in luce peculiarità dei diversi ragionamenti

# **IL PROGETTO MMLab-ER: un esempio con la PASCALINA**



**Rossella Garuti**  
**Dirigente scolastico e insegnante -ricercatore**  
**Dottorato presso l'Università di Modena e Reggio Emilia**

# **Esempi di attività laboratoriali con la Pascalina**

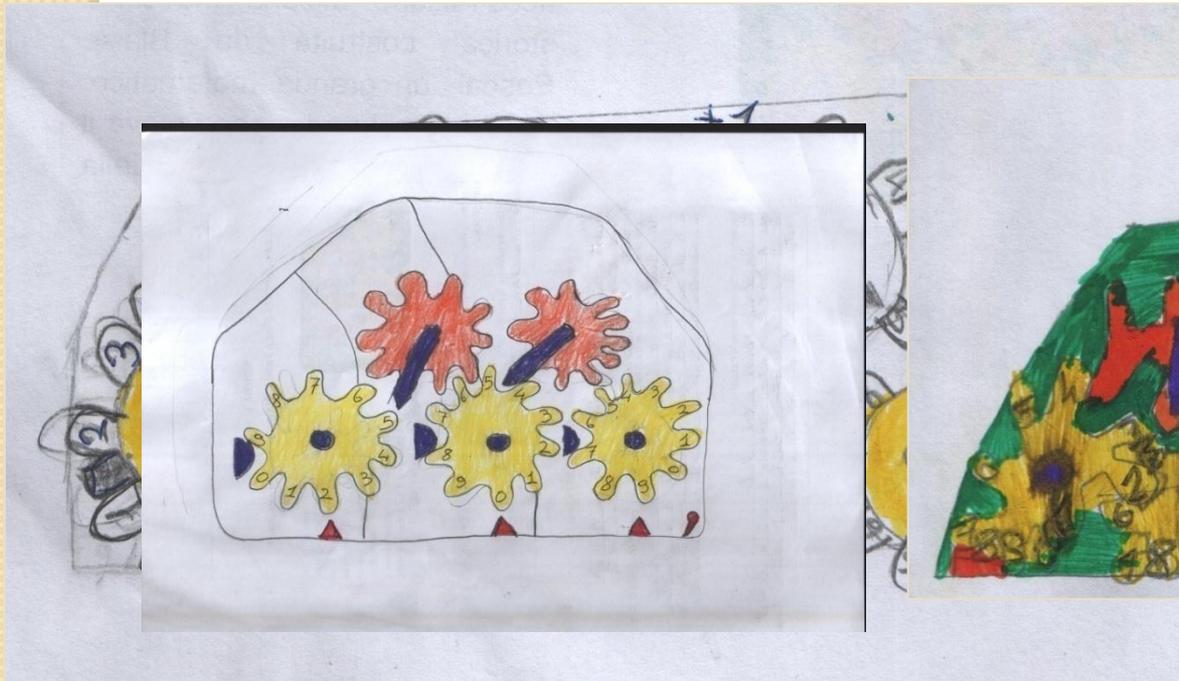
**Scuola secondaria di primo grado  
I**

# SCHEMA DELLE ATTIVITA'

1. La Pascalina come artefatto: come è fatta la macchina?
2. Alla scoperta di alcuni schemi d'utilizzo della Pascalina
3. L'addizione e la sottrazione: diversi schemi d'utilizzo. Come funziona? Perché?
4. Un problema curioso: calcola  $8-3=?$
5. La moltiplicazione: diversi schemi d'utilizzo. Come funziona? Perché?
6. La divisione: diversi schemi d'utilizzo. Come funziona? Perché?
7. Criteri di divisibilità con la Pascalina
8. Una lettera storica: Blaise Pascal (1645)

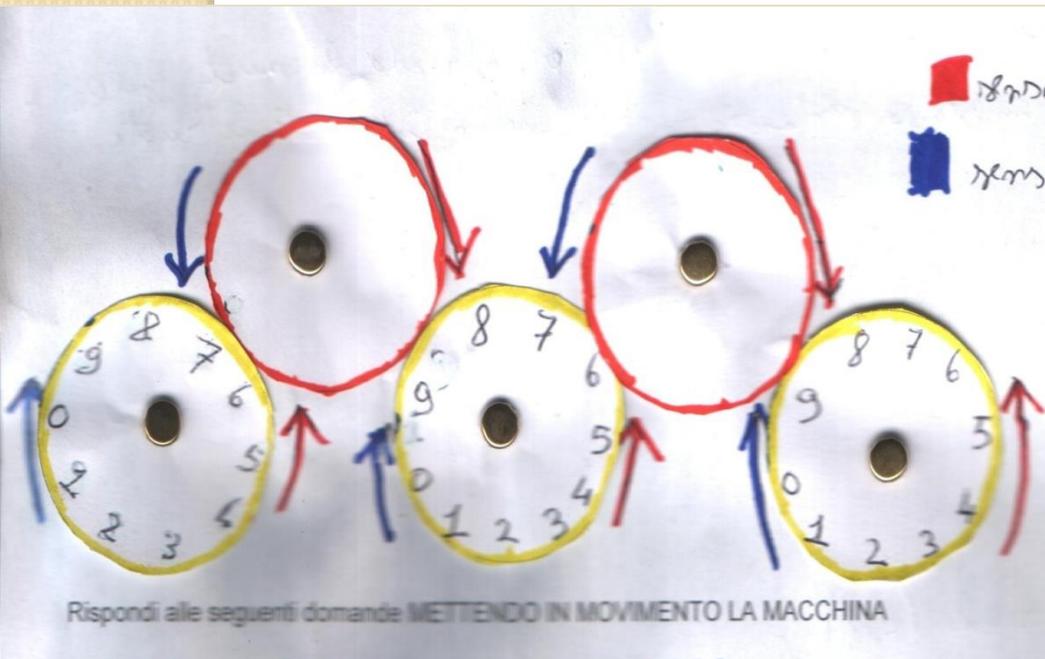
# L'ARTEFATTO

***Disegna e descrivi come è fatta la pascalina senza farla “girare”***



# ARTEFATTO

## Descrivi come si muove la pascalina (Giacomo)



*Quando la ruota in basso a destra arriva a 9 fa muovere la ruota arancione che a sua volta muove la seconda ruota gialla. Le ruote arancioni si muovono quando una gialla arriva a 9. Le ruote dentate gialle si possono muovere sia in senso orario che antiorario. Secondo me le ruote arancioni servono a far muovere le ruote gialle*

# ARTEFATTO → STRUMENTO

- FAI UN CLICK VERSO L'ALTO (ANTIORARIO)
- FAI UN CLICK VERSO IL BASSO (ORARIO)



- AGGIUNGI 1
- SOTTRAI 1

# STRUMENTO

*Fai con la Pascalina la seguente addizione*

$$**729+11=**$$

*Spiega con cura quello che fai. Spiega con cura cosa fa la macchina*

# Due diversi schemi d'utilizzo

***Posiziono la Pascalina a 729 e siccome 11 è composta da una decina e da una unità devo aggiungere 1 alla ruota gialla a destra che fa il riporto di 1 alla ruota centrale e poi devo aggiungere 1 a quest'ultima (Flavia)***

***Posiziono la Pascalina a 729 e poi giro 11 volte la ruota gialla a destra. La Pascalina fa il riporto quindi si muove anche la ruota gialla centrale (Valentina)***

# Due diversi schemi d'utilizzo

***Lo schema d'utilizzo  
di Flavia corrisponde  
a***

$$***729 + 10 + 1 = 740***$$

***Lo schema d'utilizzo di  
Valentina corrisponde a  
729+1+1+1+1+1+1+1+1+1  
+1+1=740***



**Grazie!**