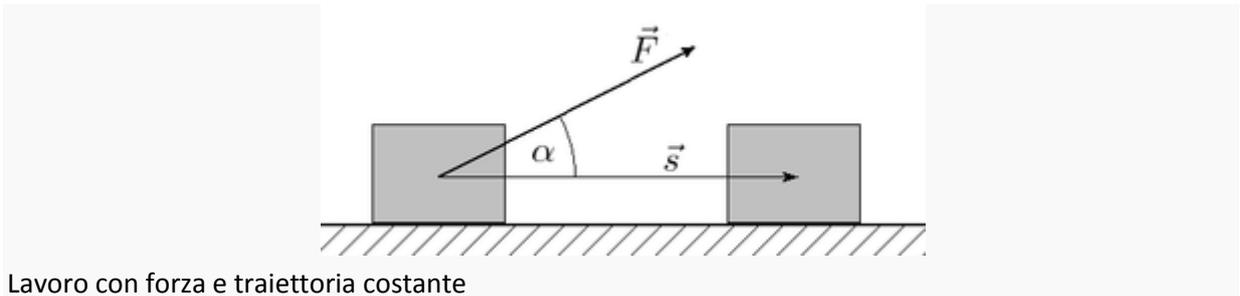


## Il Lavoro meccanico<sup>1</sup>

In meccanica classica il **lavoro** di una forza costante  $\vec{F}$  lungo un percorso rettilineo è definito come il prodotto scalare del vettore forza per il vettore spostamento  $\vec{s}$ :

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

dove  $L$  è il lavoro e  $\alpha$  l'angolo tra la direzione della forza e la direzione dello spostamento.



Lavoro con forza e traiettoria costante

Il termine utilizzato in fisica differisce dalla definizione usuale di lavoro, che è decisamente antropomorfa. Infatti si compie un lavoro se si ha uno spostamento e se questo spostamento non è chiuso (cioè ritorna al punto di partenza). Ad esempio se si spinge contro un muro, naturalmente il muro non si sposta e, quindi, non si ha lavoro.

<sup>1</sup> Nel Sistema Internazionale l'unità di misura per il lavoro è il joule che corrisponde allo spostamento di 1 metro di una forza unitaria misurata in newton:

$$J = Nm = \text{kgm}^2\text{s}^{-2}$$

Tra le altre unità di misura del lavoro ricordiamo il chilogrammetro, l'erg e l'elettronvolt.

Ricordiamo che il **chilogrammetro** (simbolo **kgm**) è un'unità di misura ingegneristica adottata comunemente per misurare il lavoro. Un chilogrammetro è pari ad un chilogrammo forza per un metro.

$$1 \text{ kgm} = 1 \text{ kgf} \cdot 1 \text{ m} \sim 9,81 \text{ J}$$

Equivale al lavoro necessario per sollevare di un metro la massa di un chilogrammo.

L'**erg** è l'unità di misura dell'energia e del lavoro nel sistema di misura CGS.

$$\text{Un erg è pari a } 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{s}^{-2} = 1 \text{ dyn}\cdot\text{cm} = 10^{-7} \text{ W}\cdot\text{s}.$$

1 erg equivale a:

$$6,24150975 \cdot 10^{11} \text{ eV}$$

$$10^{-7} \text{ joule}$$

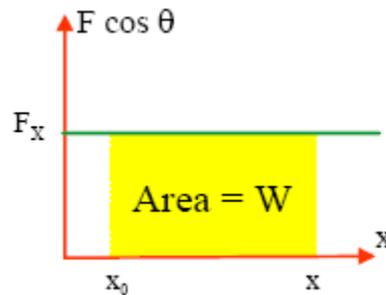
$$10^{-7} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$2,39 \cdot 10^{-8} \text{ calorie}$$

$$9,48 \cdot 10^{-11} \text{ British thermal unit}$$

$$2,78 \cdot 10^{-14} \text{ chilowattora}$$

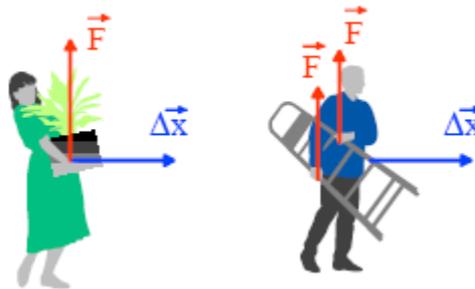
Graficamente possiamo rappresentare in un piano cartesiano la forza agente su un corpo in funzione dello spostamento. Nel caso di una forza costante il lavoro è rappresentato dalla regione di piano sottesa alla retta orizzontale estesa tra le due posizioni  $x_0$  e  $x$ .



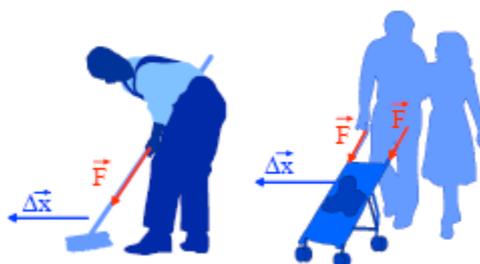
Il lavoro può essere sia positivo che negativo, il segno dipende dall'angolo  $\alpha$  compreso tra il vettore forza  $\vec{F}$  ed il vettore spostamento  $\vec{s}$ .

Il lavoro svolto dalla forza è positivo se  $\alpha < 90^\circ$  ovvero se  $\cos \alpha > 0$ . Un lavoro positivo è definito **motore**, uno negativo, invece, **resistenza**.

Se l'angolo tra la direzione della forza e lo spostamento è di  $90^\circ$ , allora il coseno è nullo e pertanto la forza non compie lavoro.

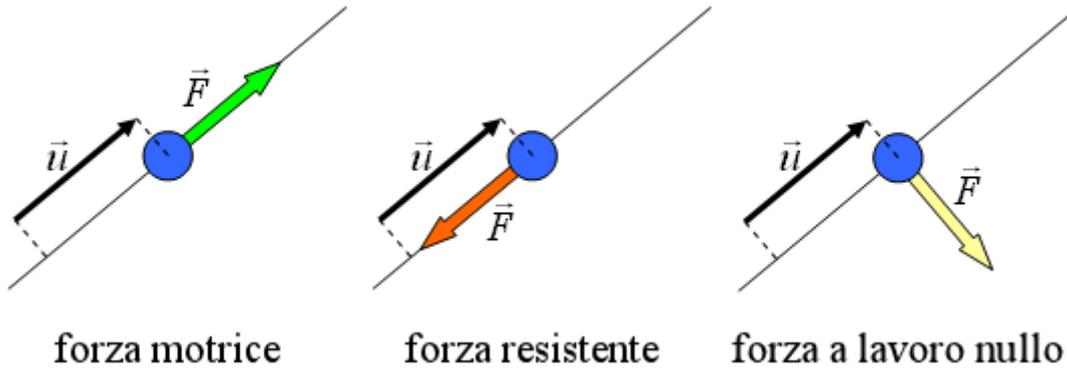


In questi due casi, sia la signora che solleva la pianta che l'uomo con la scala non compiono lavoro perché la direzione della forza è perpendicolare allo spostamento.

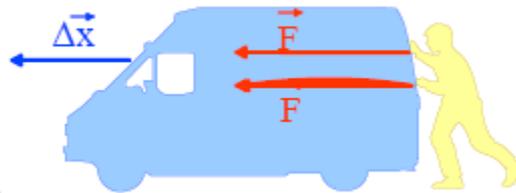


In questi due casi si compie un lavoro perché si forma un angolo tra la direzione della forza e lo spostamento.

Possiamo così schematizzare le situazioni che possono incontrarsi:



Infine, se l'angolo è  $0^\circ$  si ottiene il massimo lavoro motore, mentre se l'angolo è  $180^\circ$  si ottiene il massimo lavoro resistente.

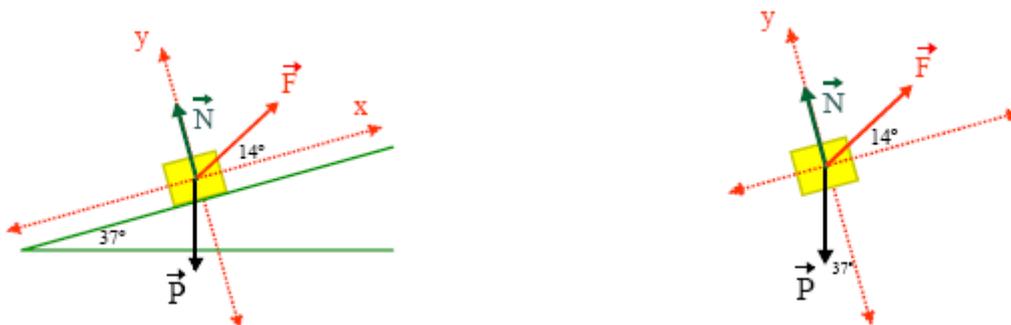


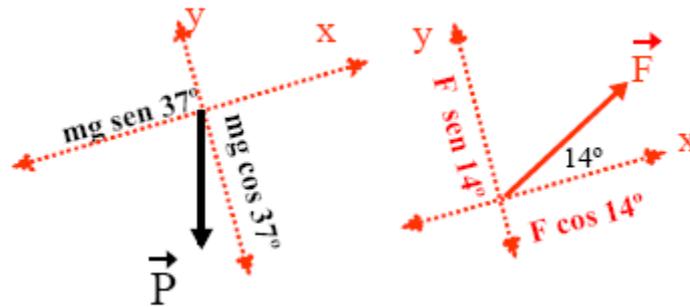
### Esercizio svolto n°1

Un blocco di 40Kg è spinto per 20 metri su un piano inclinato di  $37^\circ$  rispetto all'orizzontale da una forza che forma un angolo di  $14^\circ$  rispetto al piano inclinato e che ha modulo di 200N. Supponendo trascurabile l'attrito si calcoli:

- ✚ Il lavoro della forza  $F$
- ✚ Il lavoro della forza peso
- ✚ Il lavoro netto sul blocco parallelamente al piano inclinato
- ✚ Il lavoro netto realizzato dalla normale al piano inclinato

### Soluzione





Il lavoro della Forza F è

$$L_F = F \cdot \cos 14^\circ \cdot s = 200 \text{ N} \cdot 0,97 \cdot 20 \text{ m} = 3880 \text{ J}$$

Il lavoro della forza peso P è

$$L_P = P \cdot \cos 233^\circ \cdot s = 200 \text{ N} \cdot (-0,6) \cdot 20 \text{ m} = 4800 \text{ J}$$

Il lavoro lungo y è nullo perché lungo questa direzione non c'è spostamento

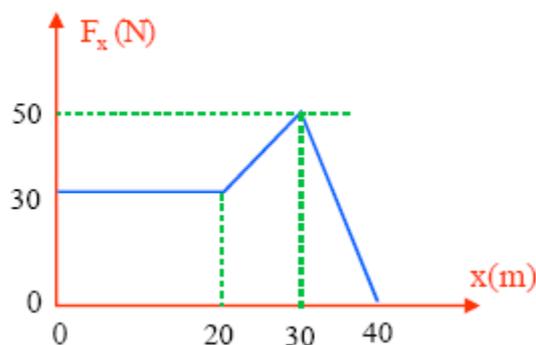
Il lavoro netto lungo la direzione parallela al piano è la risultante delle forze per lo spostamento:

$$L_{//} = (F \cdot \cos 14^\circ - mg \sin 37^\circ) \cdot s = -920 \text{ J}$$

Si tratta di un lavoro resistente.

### Esercizio svolto n°2

A partire dal diagramma che vede in relazione la forza che agisce su un corpo e lo spostamento si ricavi il lavoro effettuato sul corpo durante i primi 30 minuti



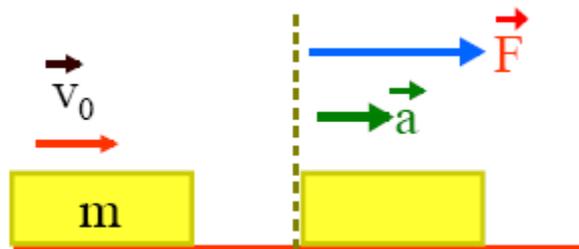
### Soluzione

Il lavoro è l'area della regione di piano sottesa alla curva. Da rilievi geometrici si ottiene:

$$L = 30 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} + 30 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ J}$$

**Esercizio svolto n°3**

Un blocco si muove su una superficie orizzontale senza attrito e soggetto a una forza costante  $F$  che agisce parallelamente alla superficie stessa. Si calcoli il lavoro della forza  $F$ .

**Soluzione**

Se il corpo è soggetto ad una forza costante, esso si muove con accelerazione costante.

Il lavoro della forza  $F$  è pertanto:

$$L = F \cdot \cos 0^\circ \cdot \Delta x$$

La forza  $F$  dobbiamo ricavarla dalla seconda legge della dinamica

$$F = m \cdot a$$

Trattandosi di un moto rettilineo possiamo ricavare l'accelerazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta x}$$

Da cui

$$F = m \cdot \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta x} \right)$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro si ottiene la relazione finale

$$L = m \cdot \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta x} \right) \cdot \Delta x$$

**Esercizi proposti****Esercizio n°1**

Un carrellino viene spostata verso destra di 80 cm da una forza di 20 N. Quanto vale il lavoro di tale forza?

**Esercizio n°2**

Per spostare una cassa di 25 m sono stati necessari 500 J di lavoro. Con quale forza è stata tirata la cassa nella stessa direzione e verso?

**Esercizio n°3**

Per spostare una macigno è stata necessaria una forza di 30000 N compiendo un lavoro di 150 kJ. Di quanto è stato spostato il macigno nella stessa direzione e verso della forza?

**Esercizio n°4**

Calcolare il lavoro realizzato per sollevare un corpo di 5Kg fino ad un'altezza di 2m in 3s. Esprimere il risultato il Joule e in Erg

**Esercizio n°5**

Calcolare il lavoro di una forza di 3N il cui punto di applicazione si sposta di 12 metri parallelamente alla forza

**Esercizio n°6**

Calcolare il lavoro per sollevare un oggetto di massa 4Kg fino ad un'altezza di 1,5 metri

**Esercizio n°7**

Una ragazza trascina una scatola che pesa 40 N a velocità costante per una distanza di 10 m sul pavimento. Quanto lavoro compie se il coefficiente di attrito cinetico vale 0,2?

[W= 80 J]

**Esercizio n°8**

Un bambino siede sulla ruota gigante di un luna-park. Quanto lavoro hanno compiuto le forze gravitazionali su di lui quando la ruota ha fatto un giro completo?

**Esercizio n°9**

Un blocco si muove per 7 metri grazie all'azione di una forza di 12N. Tale forza agisce in un primo momento orizzontalmente. Calcolare il lavoro della forza nei seguenti casi:

a) 0° b) 60° c) 90° d) 135° e) 180°



**Esercizio n°10**

Un blocco di massa  $m=6\text{Kg}$  si muove per 12 metri su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza di 10N la cui direzione forma un angolo di  $53^\circ$  con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito cinematico tra il blocco e il piano è 0,1. Si determini il lavoro realizzato dalle seguenti forze agenti sul blocco:

- La forza normale
- la forza peso
- la forza di attrito.
- F
- la risultante delle forze

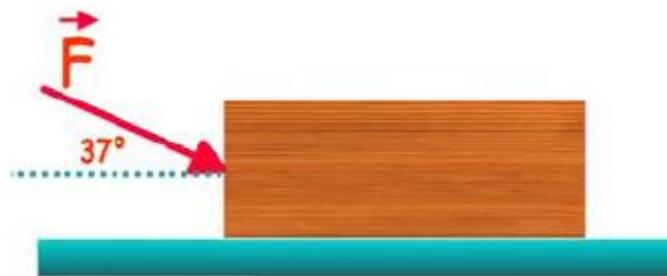
**Esercizio n°11**

Un uomo trascina un sacco di farina di 80Kg per un tratto di 12 metri con una forza di 30N, poi solleva il sacco di 90cm per caricarlo su un camion. Calcolare il lavoro totale che viene esercitato sul sacco

**Esercizio n°12**

Un blocco di 3Kg viene spinto per 6 metri su un piano orizzontale con velocità costante e con una forza media  $F$  che forma un angolo di  $37^\circ$  rispetto al piano orizzontale, come mostrato in figura. Supponendo che agisca una forza di attrito di 20N, si determini:

- il lavoro netto effettuato sul blocco
- il lavoro effettuato da  $F$
- il coefficiente di attrito cinetico tra blocco e piano.

**ESERCIZIO N°13 (dal testo Amaldi)**

Una massaia trascina un carrello con una forza di 105,5 N inclinata di  $30^\circ$  verso l'alto rispetto all'orizzontale compiendo un lavoro di 1048 J. Quanti metri ha percorso la massaia con il carrello?

**ESERCIZIO N°14 (dal testo Amaldi)**

L'autista di un pullman scende lungo una strada di collina e ad un certo punto aziona il freno per evitare un ostacolo. Il lavoro compiuto è di  $5,8 \times 10^5$  J e la forza impiegata è di  $6,5 \times 10^3$  N. Quanto vale il modulo dello spostamento compiuto prima di arrestarsi?

**ESERCIZIO N°15 (dal testo Amaldi)**

Secondo le nuove normative il peso totale dei libri di testo non deve superare un certo valore. Antonio trascina uno zaino per 10,2 m compiendo un lavoro di 720 J con una forza inclinata di  $45^\circ$  verso l'alto rispetto all'orizzontale. Calcola la forza con la quale il bambino sposta lo zaino.

## Energia e Lavoro

L'energia è una grandezza scalare associata allo stato (2) di uno o più corpi. La parola energia deriva da tardo latino *energĭa*, a sua volta dal greco *ενεργεια*, usata da Aristotele nel senso di azione efficace, composta da *εν*, particella intensiva, ed *εργον*, capacità di agire. Fu durante l'epoca del Rinascimento che, ispirandosi alla poesia aristotelica, il termine fu associato all'idea di forza espressiva. Ma fu solo nel 1619 che Keplero usò il termine nell'accezione moderna di energia fisica.

Dal punto di vista della fisica, ogni sistema fisico contiene (o immagazzina) un determinato quantitativo, di una proprietà scalare continua, chiamata energia; per determinare la quantità di energia di un sistema si devono sommare una serie di equazioni specifiche, ognuna delle quali è designata a quantificare l'energia conservata in un determinato modo (vedi l'elenco delle forme di energia). Non esiste una maniera uniforme di visualizzare l'energia; è meglio pensarla come una quantità astratta, utile per fare delle previsioni.

Il primo tipo di previsioni che l'energia permette di fare, sono legate a quanto lavoro un sistema è in grado di compiere. Svolgere un lavoro richiede energia, e quindi la quantità di energia presente in un sistema limita la quantità massima di lavoro che detto sistema può svolgere. Nel caso unidimensionale, l'applicazione di una forza per una distanza richiede un'energia pari al prodotto del modulo della forza per lo spostamento.

Si noti, comunque, che non tutta l'energia di un sistema è immagazzinata in forma utilizzabile; quindi, in pratica, la quantità di energia di un sistema, disponibile per produrre lavoro, può essere molto meno di quella totale del sistema.

L'energia<sup>3</sup> permette anche di fare altre previsioni. Infatti, grazie alla [legge di conservazione dell'energia](#) valida per sistemi chiusi, si può determinare lo stato cinetico di un sistema sottoposto ad una sollecitazione quantificabile. Ad esempio si può prevedere quanto velocemente si muoverà un determinato corpo a riposo, se una determinata quantità di calore viene completamente trasformata in movimento di quel corpo. Similmente, sarà possibile anche prevedere quanto calore si può ottenere spezzando determinati legami chimici.

L'energia esiste in varie forme, ognuna delle quali possiede una propria equazione dell'energia. Alcune delle più comuni forme di energia sono le seguenti:

[Energia meccanica](#), definita classicamente come somma di potenziale e cinetica

[Energia cinetica](#)

[Energia termica](#)

---

<sup>2</sup> Il termine *stato* ha qui il significato del linguaggio comune: è la condizione in cui si trova il corpo

<sup>3</sup> L'unità di misura derivata del Sistema Internazionale, per l'energia e il lavoro è il joule (simbolo: *J*), chiamata così in onore del fisico inglese James Prescott Joule e dei suoi esperimenti sull'equivalente meccanico del calore. 1 joule esprime l'energia usata (o il lavoro effettuato) per imprimere ad una massa di 1 kg una forza di 1 newton, cioè un'accelerazione di  $1 \text{ m} \times \text{s}^{-2}$ . 1 joule equivale quindi a 1 newton metro, e in termini di unità base SI, 1 J è pari a  $1 \text{ kg} \times \text{m}^2 \times \text{s}^{-2}$  (in unità CGS l'unità base è l'erg ovvero  $1 \text{ g} \times \text{cm}^2 \times \text{s}^{-2}$ ).

Energia potenziale  
Energia potenziale gravitazionale  
Energia elettrica  
Energia chimica  
Energia nucleare  
Energia libera  
Radiazione elettromagnetica  
Energia di massa  
Energia geotermica  
Energia eolica  
Energia solare  
Energia elastica

Ci occuperemo in particolare di due forme di energia, l'energia cinetica e l'energia potenziale, della relazione esistente tra di esse e della relazione tra energia e lavoro

## L'energia cinetica

L'energia cinetica  $K$  è associata allo stato di moto del corpo. Quanto più veloce è l'oggetto considerato, tanto maggiore è la sua energia cinetica. Quando l'oggetto è a riposo la sua energia cinetica è nulla. Per un corpo di massa  $m$  e dotato di velocità  $v$  (ben inferiore a quella della luce) definiamo l'energia cinetica attraverso la relazione

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

L'energia cinetica non può essere negativa perché non possono esserlo né  $m$  né  $v^2$

## Il teorema dell'energia cinetica<sup>4</sup> (o delle forze vive)<sup>5</sup>

Per trovare la relazione che intercorre tra il lavoro della risultante  $F$  delle forze agenti su un oggetto puntiforme  $P$  e le caratteristiche cinematiche dell'oggetto partiamo dalla seconda legge della dinamica

---

<sup>4</sup> Dalla radice del verbo greco *κινεομαι* che significa muoversi

<sup>5</sup> Anticamente si definiva "*vis viva*", cioè "*forza viva*", il prodotto della massa per il quadrato della **velocità**. Da qui la denominazione di "*teorema delle forze vive*", usata su alcuni vecchi testi di fisica al posto della più recente denominazione di "*teorema dell'energia cinetica*".

$$F = ma$$

Stiamo dunque supponendo che un oggetto si muova su un piano orizzontale privo di attrito soggetto alla forza costante  $F$ ; supponiamo che la forza agisca sull'oggetto per uno spostamento  $s$ , fornendo una velocità  $v$  il cui modulo è ricavabile dall'espressione (moto uniformemente accelerato)

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot s$$

da cui

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

che, sostituita nell'espressione della seconda legge della dinamica, diventa

$$F = m \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Moltiplicando scalarmente per lo spostamento elementare  $s$ , si ha

$$F \cdot s = m \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2s} \cdot s$$

e dunque

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$$

che si può anche scrivere

$$L = K - K_0$$

o, ciò che è lo stesso,

$$L = \Delta K$$

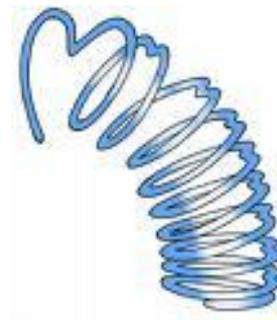
Questa espressione rappresenta quello che comunemente viene chiamato teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive):

“ quando un oggetto puntiforme si muove lungo una certa traiettoria da un punto iniziale  $P_0$  ad un punto  $P$ , il lavoro compiuto dalla risultante delle forze su di esso agenti è pari alla variazione di energia cinetica, cioè pari alla differenza tra l'energia cinetica che l'oggetto possiede nella posizione finale e quella che aveva nella posizione iniziale”

## Energia potenziale

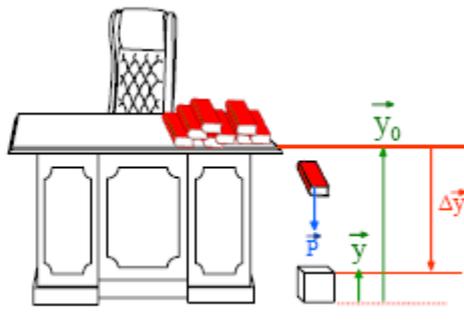
Un'altra forma di energia è l'energia potenziale, che può essere definita come l'energia associata allo stato di separazione fra corpi che si attraggono reciprocamente per effetto della forza di gravità.

Ad esempio, un oggetto posto sopra una mensola oppure una molla compressa sono forme di lavoro accumulato e "potenzialmente" disponibile. Se l'oggetto cade dalla mensola oppure la molla si sgancia, l'energia potenziale si manifesterà appieno realizzando un lavoro.



Se lanciamo verso l'alto un oggetto, durante la salita il suo peso compie un lavoro negativo su di lui diminuendo la sua energia cinetica e trasferendo energia all'energia potenziale gravitazionale del sistema oggetto –Terra. Durante la discesa il suo peso compie un lavoro positivo su di lui aumentando la sua energia cinetica e trasferendo energia dall'energia potenziale gravitazionale del sistema.

Facciamo ancora qualche esempio concreto



Consideriamo un oggetto su un piano orizzontale ad una altezza  $y_0$  rispetto al suolo che dal bordo cade al suolo soggetto alla sola forza peso. Quando l'oggetto cade la forza peso  $P = mg$  compie lavoro. Il lavoro è dato da

$$L_p = mg \cdot (y - y_0) \cdot \cos 0^\circ$$

dove  $y - y_0$  rappresenta lo spostamento.

<sup>6</sup> il coseno quando l'angolo è di zero gradi vale 1

Di qui si ha:

$$L_p = mgy - mgy_0$$

Il lavoro fatto dalla forza peso ha provocato il cambiamento della quantità  $mgy$  che possedeva il corpo inizialmente. Questa quantità rappresenta l'energia potenziale gravitazionale

In altre parole, l'energia potenziale di un corpo è per definizione

$$U = mgh$$

dove  $h$  rappresenta l'altezza a cui si trova posizionato l'oggetto

Esempio

Calcolare il lavoro necessario per sollevare un oggetto ad una altezza  $h$  dalla superficie terrestre

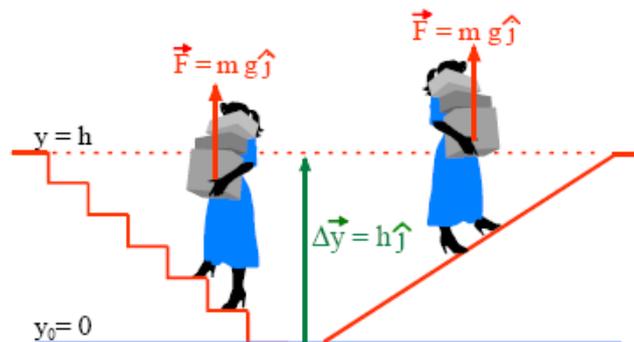
Soluzione

Se consideriamo la superficie terrestre come origine del sistema di riferimento, lì  $y_0 = 0$ . Per sollevare l'oggetto fino alla posizione  $y$  è necessaria una forza uguale alla forza Peso ma di segno opposto. Pertanto:

$$L = mgy - mgy_0 = mgy = mgh$$

**Osservazione importante:**

Se solleviamo un oggetto per un tratto non verticale come, ad esempio, un piano inclinato o una scala, compieremo sempre lo stesso lavoro

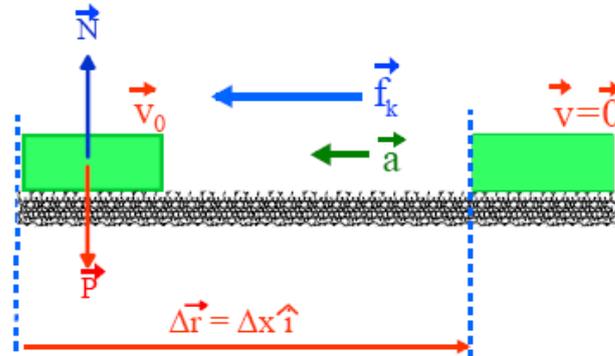


Questo è dovuto al fatto che la forza peso è una forza conservativa<sup>7</sup> (ma questa è un'altra puntata)

<sup>7</sup> Sono forze conservative tutte quelle forze il cui lavoro non dipende dal percorso eseguito ma solo dalla posizione iniziale e finale. O, equivalentemente, se il lavoro lungo un cammino chiuso è pari a zero. Le forze conservative non dipendono dal tempo, né dalla velocità né dall'accelerazione del corpo.

**Esercizio svolto n°1**

Calcolare lo spostamento di un oggetto prima che si fermi se attraversa un piano orizzontale scabro. Si supponga che  $\mu_k = 0,1$  e che la velocità, prima di attraversare la parte rugosa, è costante e di modulo pari a 5m/s

**Soluzione**

L'unica forza che agisce sull'oggetto è la forza di attrito.

Il lavoro della forza di attrito è, se indico con  $\Delta x$  lo spostamento:

$$L = f_k \cdot \cos 180^\circ \cdot \Delta x = \mu_k N \cdot (-1) \cdot \Delta x = \mu_k mg \cdot \Delta x$$

Applicando il teorema dell'energia cinetica, si ha:

$$-\mu_k mg \cdot \Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dividendo tutto per m e tenuto conto che  $v = 0$  e che  $x_0 = 0$ , si ottiene:

$$-\mu_k g \cdot \Delta x = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Da questa relazione posso ricavare  $\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} = 12,5m$

**Esercizio svolto n°2**

Una macchina ha massa 1200 kg. Supponendo un piano con coefficiente di attrito  $\mu=0.17$ , determinare lo spazio di frenata supponendo una velocità iniziale di 40 km/h e di 80 km/h.

**Soluzione:**

La massa è  $m=1200$  kg, il piano ha coefficiente di attrito  $\mu=0.17$ .

Caso 1:  $v=40$  km/h= $11.1$  m/s

L'energia cinetica iniziale è  $K = \frac{1}{2}mv^2$  mentre quella finale è nulla.

Perciò il lavoro fatto dalle forze di attrito per fermare la macchina è  $L = -73920 \text{ J}$ .

Il lavoro può essere scritto  $L = \mu mgs$  dato che forza e spostamento hanno la stessa direzione.

$$\text{Quindi lo spazio di frenata è } s = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Caso 2:  $v=80 \text{ km/h}=22.2 \text{ m/s}$

Ad una velocità doppia corrisponderà uno spazio di frenata quadruplo!

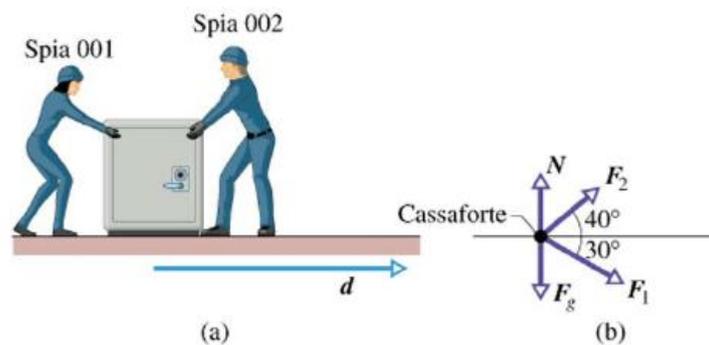
### Esercizio svolto n°3

Due spie industriali fanno scivolare una cassaforte di massa  $m = 250 \text{ kg}$ , inizialmente ferma, per una distanza  $d = 8.50 \text{ m}$ . La forza  $F_1$  con la quale l'agente 001 spinge la cassaforte è di  $12.0 \text{ N}$ , e la direzione della forza forma un angolo di  $30^\circ$  verso il basso rispetto all'orizzontale. La forza  $F_2$  con cui l'agente 002 tira la cassaforte è di  $10.0 \text{ N}$ , in direzione di  $40^\circ$  verso l'alto rispetto alla linea orizzontale. Si considerino le forze costanti e l'attrito nullo.

a) quale è il lavoro totale svolto dalle due forze sulla cassaforte durante lo spostamento  $d$ ?

b) quale è il lavoro  $L_g$  sviluppato sulla cassaforte dalla sola forza di gravità ed il lavoro  $L_N$  compiuto dalla forza normale esercitata dal suolo?

c) la cassaforte era inizialmente ferma, quale è la velocità finale al termine dello spostamento  $d$ ?



Soluzione

#### Idea chiave:

- Il lavoro totale è pari alla somma dei lavori svolti dalle due forze.
- La cassaforte è assimilabile ad un corpo puntiforme di massa  $m$
- le forze sono costanti, quindi  $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

a) Osservando il diagramma vettoriale delle forze relativo alla cassaforte, considerata come un corpo puntiforme, possiamo calcolare il lavoro totale svolto dalle due spie trovando il lavoro svolto da ciascuna delle due e sommando i due valori.

Il lavoro svolto dall'agente 001 è

$$L_1 = F_1 \cdot d \cdot \cos \phi_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = 12 \text{ N} \cdot 8,5 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ = 88,33 \text{ J}$$

e il lavoro sviluppato dall'agente 002 è:

$$L_2 = F_2 \cdot d \cdot \cos \phi_2 \quad \Rightarrow \quad L_2 = 10 \text{ N} \cdot 8,5 \text{ m} \cdot \cos 40^\circ = 65,11 \text{ J}$$

Il lavoro totale è

$$L = L_1 + L_2 = 153 \text{ J}$$

b) entrambe le forze, sia quella Normale che la forza Peso, sono perpendicolari al pavimento, di modo che nessuna delle due svolge lavoro sulla cassaforte:

$$L_p = mg \cdot d \cdot \cos 90^\circ = mgd \cdot (0) = 0$$

$$L_N = N \cdot d \cdot \cos 90^\circ = Nd \cdot (0) = 0$$

Queste forze non trasferiscono nessuna energia alla cassaforte né viceversa

c) la velocità della cassaforte cambia perché varia l'energia cinetica quando le viene ceduta energia dalle forze applicate.

Possiamo mettere in relazione la velocità col lavoro svolto:

$$L = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

La velocità iniziale sappiamo essere  $v_0 = 0$

Da cui

$$v = \sqrt{\frac{2L}{m}}$$

Fai da solo i calcoli

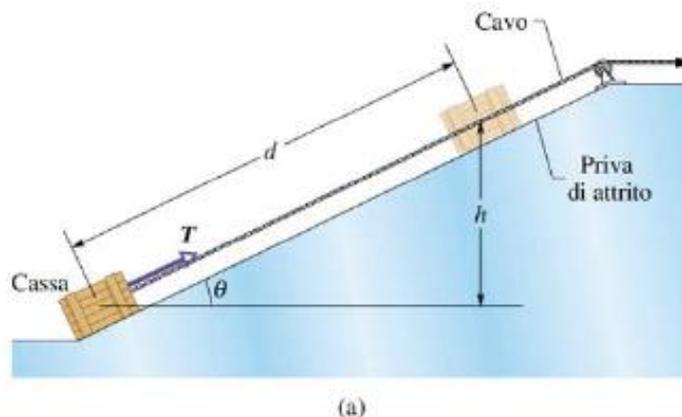
#### Esercizio svolto n°4

Una cassa di **15 kg** è trascinata in salita a velocità costante su una rampa priva di attrito per una distanza  $d=5.70\text{m}$ , fino a un'altezza  $h = 2.50 \text{ m}$  rispetto al suo punto di partenza, quindi si arresta.

a) quanto lavoro viene svolto dalla forza gravitazionale  $F_p$ ?

b) quanto lavoro viene compiuto sulla cassa dalla forza  $T$  del cavo che tira su la cassa per il piano inclinato?

c) cosa succede se sollevo la cassa della stessa quota  $h$  ma con rampa più lunga?



**Soluzione**

a) Se indichiamo con  $d$  il valore dello spostamento e notiamo che l'angolo tra la forza peso e lo spostamento è  $\theta + 90^\circ$  (vedi diagramma delle forze) possiamo scrivere:

$$L_p = mg \cdot d \cdot \cos(\theta + 90^\circ) = -mgd \sin \theta$$

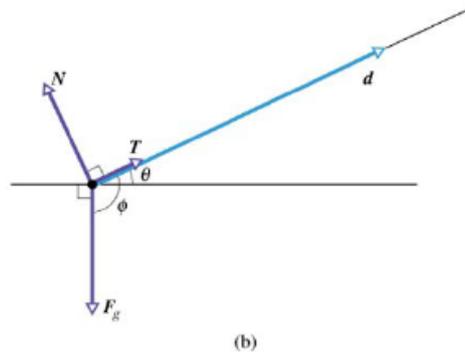
Dalla figura si riconosce che  $d \sin \theta$  è il dislivello  $h$  superato dalla cassa. Pertanto si potrà scrivere

$$L = -mgh$$

Questo significa che il lavoro dovuto dalla forza Peso dipende dalla distanza verticale realizzata e non dallo spostamento orizzontale.

Sostituendo i dati otteniamo

$$L = -(15 \text{ Kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,20 \text{ m}) = -368 \text{ J}$$



b) dato che la cassa è ferma prima e dopo lo spostamento, allora la variazione di energia cinetica è nulla. Pertanto, ricordando il teorema dell'energia cinetica, si avrà:

$$\Delta K = L_1 + L_2 + \dots$$

che nel nostro caso diventa:

$$0 = L_p + L_T$$

da cui

$$L_T = 368 \text{ J}$$

**Esercizi proposti****Esercizio n°1**

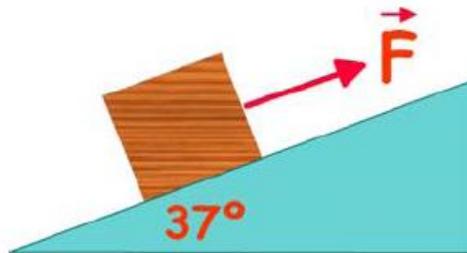
Un corpo di massa 1Kg scivola lungo un piano inclinato di  $30^\circ$  scabro alto 10 metri. Se il coefficiente di attrito cinetico tra il corpo e la superficie è di 0,05, calcolare:

- l'energia cinetica alla base del piano inclinato
- il modulo della velocità del corpo alla base del piano

**Esercizio n°2**

Un blocco di 50Kg viene spinto su un piano inclinato di  $37^\circ$  rispetto all'orizzontale con una forza di 500N e direzione parallela al piano. Sapendo che il coefficiente di attrito cinetico tra il blocco e il piano di 6 metri è 0.1, si calcoli:

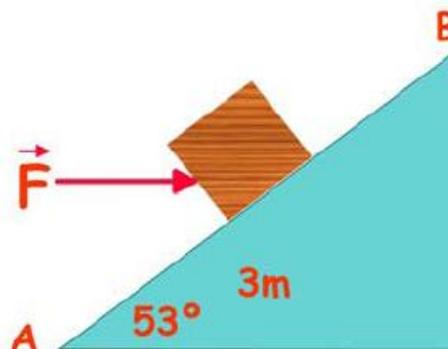
- il lavoro esercitato da F
- il lavoro della forza di attrito
- la variazione di energia potenziale del blocco
- la variazione di energia cinetica del blocco
- la velocità del blocco dopo aver percorso 6 metri, se la velocità iniziale è di 3m/s

**ESERCIZIO N°3**

Un blocco di 4Kg inizialmente fermo viene spinto su un piano inclinato scabro, alto 1 metro e che presenta un angolo di inclinazione di  $53^\circ$  rispetto al piano orizzontale. Sul blocco agisce una forza costante di 60N parallela al piano orizzontale; sapendo che la velocità del blocco nel punto B è di 1,2m/s, si calcoli il lavoro realizzato tra a e B delle seguenti forze

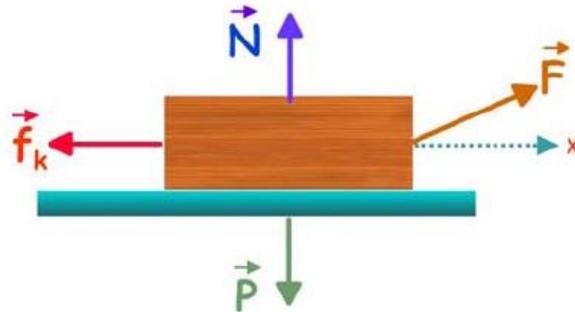
- normale
- F
- Peso
- Forza risultante
- Attrito

Si calcoli, inoltre, il coefficiente di attrito tra il blocco e il piano

**ESERCIZIO N°4**

Su un oggetto di massa 2Kg agiscono le forze indicate in figura. L'oggetto si muove su un piano orizzontale scabro con la seguente legge oraria  $x = 3 + t^2$  (con x in metri e t in secondi). Il modulo della forza di attrito vale 3N e il coefficiente di attrito cinetico tra il blocco e il piano vale 0,3. Calcolare:

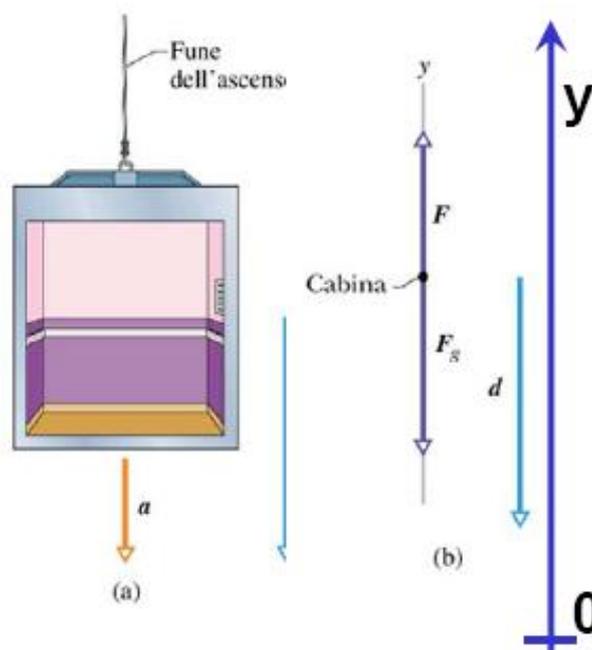
- il lavoro della forza risultante valutato nell'intervallo  $[0-3]$ s
- l'energia cinetica al tempo  $t=3$ s
- il lavoro della forza di attrito nell'intervallo  $[0-3]$ s
- il lavoro della forza peso dopo 2 secondi



### Esercizio svolto n°5

La cabina di un ascensore di massa  $m = 500 \text{ kg}$  sta scendendo alla velocità  $v_i = 4.0 \text{ m/s}$ , quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandolo cadere con accelerazione costante  $a = g/5$ .

- determinare il lavoro  $L_g$  svolto dalla forza peso durante la caduta di un tratto  $d = 12 \text{ m}$ ;
- determinare, lungo lo stesso tratto, il lavoro  $L_T$  svolto dalla forza di trazione  $T$ .
- determinare il lavoro totale sviluppato sulla cabina durante la caduta di  $12 \text{ m}$ .
- calcolare la variazione di energia cinetica della cabina alla fine della caduta di  $12 \text{ m}$ .



Soluzione

**Ulteriori esercizi (dal testo di fisica Amaldi)****Esercizio n°12**

Un'auto di massa 1000 kg accelera passando da una velocità di 72 km/h a una velocità di 144 km/h. Qual è il lavoro necessario per accelerare l'auto?

**Esercizio n°13**

Un'automobile di massa 1000 kg viaggia nel traffico urbano a una velocità di 54 km/h. Davanti a lei il semaforo diventa rosso e l'auto frena e si arresta in 16 m. Qual è il valore della forza frenante?

**Esercizio n°14**

Un carrello da supermercato di massa 10,0 kg viene spinto per 2,00 m da fermo con una forza di 100 N. La forza di attrito con il pavimento è di 30,0 N. Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza applicata al carrello? Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di attrito? Qual è la velocità finale del carrello?

**Esercizio n°15**

Uno scalatore sta passeggiando lungo un sentiero di montagna con uno zaino di massa 18,2 kg. Affronta una salita alta 10,0 m rispetto al piano. Quanto lavoro compie lo scalatore per trasportare lo zaino?

**Esercizio n°16**

In un parco di divertimenti Anna e Alice scivolano su una canoa lungo un percorso composto da tratto inclinato di lunghezza  $l = 17,2$  m e da un tratto rettilineo di lunghezza  $l = 25,1$  m. La forza di attrito nel primo tratto è di 564 N e nel secondo tratto è di 652 N. Calcola il lavoro compiuto dalle forze di attrito.

**Esercizio n°17**

Valentina, 50,0 kg, sale col suo skateboard su una rampa con la velocità iniziale di 3,90 m/s. L'altezza massima della rampa è 50,0 cm. Calcola:

- l'energia cinetica all'imbocco della rampa;
- l'energia potenziale gravitazionale (rispetto alla quota di base e con  $g = 9,80 \frac{m}{s^2}$ ) all'uscita della rampa;
- l'energia cinetica all'uscita della rampa;
- la velocità con cui esce dalla rampa.

**Esercizio n°18**

Una mela di 400 g cade da un ramo alto 250 cm.

- Quanto lavoro compie la forza-peso sulla mela?
- Qual è il valore della variazione di energia potenziale?

[9,80 J; 9,80 J]

**Esercizio n°19**

In un esercizio alla pertica, Fabio che pesa  $6,4 \cdot 10^2 N$  si arrampica fino a un'altezza di 4,0 m e poi scende a terra. Calcola la variazione della sua energia potenziale gravitazionale:

- nel tratto in salita;
- nel tratto in discesa;
- nell'esercizio completo.

[ $2,6 \cdot 10^3$  J;  $2,6 \cdot 10^3$  J; 0 J]

### Esercizio n°20

La molla di una bilancia pesa-persone, quando è compressa, si accorcia e mette in movimento l'indice sulla scala della bilancia. Camilla sale su una bilancia di questo tipo e legge il valore di 52 kg. La molla ha una costante elastica di  $1,2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ .

- Quanta energia potenziale elastica ha accumulato la molla?

[ $1,1 \cdot 10^2$  J]

### Esercizio n°21

Un flacone di detersivo di massa 1,5 kg scivola dal bordo di una vasca da bagno con velocità iniziale di 1,1 m/s fino a raggiungere il fondo della vasca, scelto come livello di zero, a una velocità di 3,1 m/s.

- Calcola l'altezza della vasca.

(L'effetto dell'attrito è trascurabile.) [0,43 m]

### Esercizio n°22

Un carrello di massa 2,0 kg viene trainato lungo un binario rettilineo da una forza costante di 50 N per 10 m.

- Che velocità acquista? (Trascura l'effetto dell'attrito.)
- A che altezza arriverebbe se venisse lanciato verso l'alto con quella velocità?

[22 m/s; 25 m]

### Esercizio n°23

David si lancia con il parapendio da una rupe alta 500 m sul fondo della valle. La sua massa complessiva (compresa l'attrezzatura) è pari a 90 kg. Nel momento in cui sta per atterrare la sua velocità è di 5,0 m/s.

- Quanta energia meccanica si è trasformata in altre forme?

[ $4,4 \cdot 10^5$  J]

### Esercizio n°24

Un ciclista di 72 kg, su una bicicletta di 15 kg, sta procedendo alla velocità di 30 km/h, quando inizia a frenare costantemente e si ferma dopo aver percorso 5,0 m.

- Qual è il valore della forza esercitata dai freni?

[ $6,0 \cdot 10^2$  N]

### Esercizio n°25

A Genova è stato costruito un sistema funicolare per collegare due vie della città poste a diverse altezze rispetto al livello del mare. L'ascensore percorre un tratto verticale lungo 70 m a una velocità di 1,6 m/s. L'ascensore ha una capienza di 23 persone, ognuna considerata di massa in media pari a 75 kg. Calcola:

- il lavoro compiuto dall'ascensore per trasportare un passeggero;
- la potenza sviluppata per trasportare la cabina a pieno carico dall'inizio alla fine della salita.

[ $5,1 \cdot 10^4$  J;  $2,7 \cdot 10^4$  W]

### Esercizio n°26

Uno sciatore di 80 kg affronta alla velocità di 50 km/h un dosso alto 3,1 m. Durante la salita, l'attrito con la neve e con l'aria trasforma  $3,3 \cdot 10^3 J$  della sua energia meccanica in altre forme di energia.

- Quanto vale la velocità dello sciatore quando raggiunge la sommità del dosso?

[7,0 m/s]

### Esercizio n°27

Un'automobile di massa 1200 kg passa da 30 km/h a 100 km/h in 180 s.

- Qual è il lavoro compiuto dal motore?
- Il lavoro del motore aumenta se la velocità di marcia aumenta in 60 s invece che in 180 s?

[ $4,2 \cdot 10^5 J$ ]

### Esercizio n°28

Un bambino di massa 30,0 kg si sta dondolando sull'altalena. Le corde a cui è fissata l'altalena sono lunghe 2,00 m. Scegliendo come livello di zero la posizione più bassa che il bambino può assumere, calcola l'energia potenziale gravitazionale del bambino nelle situazioni seguenti:

- quando le corde dell'altalena sono orizzontali;
- quando le corde dell'altalena formano un angolo di  $45,0^\circ$  rispetto alla verticale;
- quando le corde dell'altalena sono perpendicolari al terreno.

[588 J; 172 J; 0 J]

### Esercizio n°29

Un pattinatore scende lungo una discesa, percorre poi un tratto orizzontale di 10 m e risale lungo una salita. Parte da un'altezza di 4,0 m con una velocità iniziale di 4,2 m/s. Supponi che gli attriti siano trascurabili.

- A quale altezza arriva il pattinatore lungo la salita?
- L'altezza a cui arriva dipende dalla lunghezza del tratto orizzontale di raccordo?

[4,9 m]

### Esercizio n°30

Il carrello che trasporta le persone lungo la pista delle montagne russe ha la velocità di 90,0 km/h in un punto all'altezza di 20,0 m dal suolo. Quale sarà la sua velocità dopo essere sceso in un punto posto all'altezza di 11,0 m dal suolo? (Trascura gli attriti.)

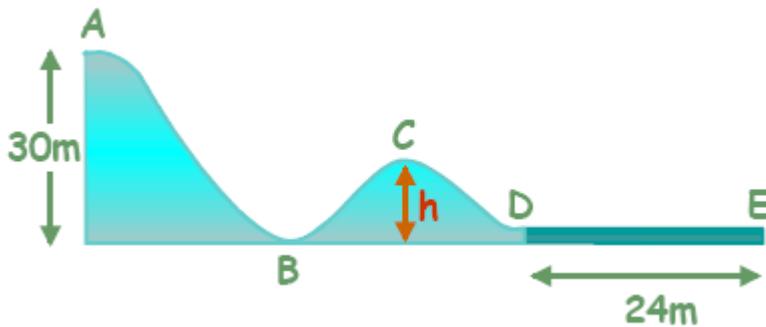
[102 km/h]

## PAULO DIFFICILIORA

### ESERCIZIO N°31

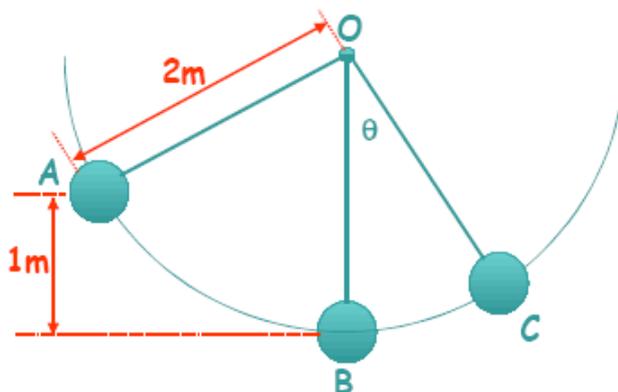
In figura è rappresentato il percorso di un carro delle montagne russe; il carro parte da fermo nel punto A a 30 metri di altezza. Sapendo che solo il tratto DE presenta attrito, si calcoli:

- la sua velocità quando passa per il punto B
- L'altezza  $h$  del punto C, sapendo che il carro passa per quel punto alla velocità di 20 m/s
- quando il carro giunge nel punto D inizia a frenare, calcolare il lavoro nel tratto DE=24 m
- qual è il coefficiente di attrito cinetico esistente tra le ruote e la strada?

**ESERCIZIO N°32**

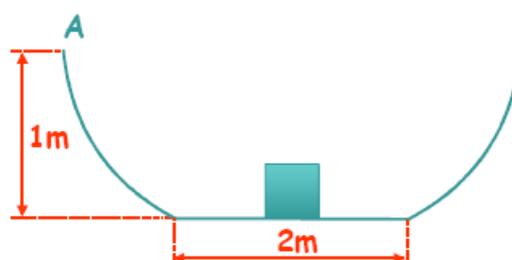
Un oggetto di massa  $0,5\text{Kg}$  è collegato al soffitto mediante una corda inestensibile e di massa trascurabile lunga  $2$  metri come mostrato in figura. Se l'oggetto viene sollevato fino ad un'altezza  $h=1\text{m}$  (posizione A) si calcoli:

- la tensione della corda quando l'oggetto si trova in B.
- l'angolo  $\theta$  che la corda formerà con la verticale nell'istante in cui la velocità raggiunge  $12\text{m/s}$ .
- il lavoro realizzato dalla forza peso quando l'oggetto si porta da B a C.

**ESERCIZIO N°33**

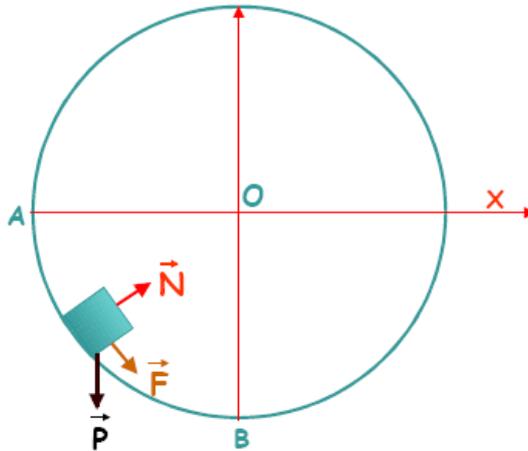
Un blocco scivola lungo una curva liscia partendo da un'altezza di  $1$  metro, come mostrato in figura, procede su un piano scabro lungo  $2$  metri che presenta un coefficiente di attrito  $\mu = 0,2$ . Si calcoli

- a che altezza risale il blocco
- la posizione in cui il blocco si fermerà



**ESERCIZIO N°34**

La figura mostra un oggetto di massa 10Kg che percorre l'arco AB di una circonferenza di raggio  $R=2\text{m}$  soggetto solo alla forza peso, a una forza  $F$  di modulo costante 8N che si mantiene sempre tangente alla traiettoria e la Normale



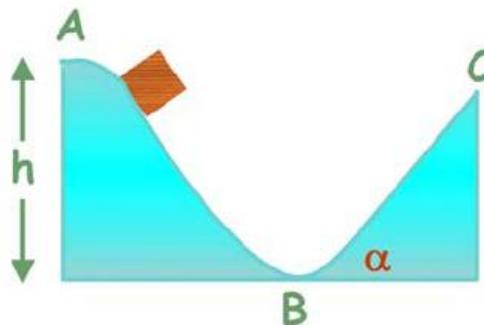
Calcolare il lavoro effettuato dalle tre forze singolarmente e poi dalla risultante.

**ESERCIZIO N°35**

Una slitta di massa 20Kg scivola a partire da una posizione di riposo  $A$  ad una altezza  $H=15\text{m}$  fino a una posizione  $B$  (si consideri scabro il piano inclinato  $AB$ ). Dal punto  $B$  risale per una rampa lunga 5 metri e inclinata di  $37^\circ$  rispetto all'orizzontale fino a raggiungere una posizione  $C$  con una velocità di  $14\text{m/s}$ .

Calcolare:

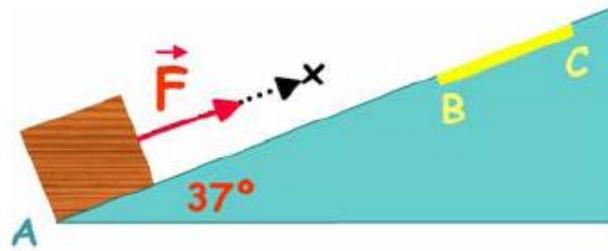
- il lavoro della risultante nel tratto  $AC$
- il coefficiente di attrito cinetico.
- L'altezza massima che la slitta potrebbe raggiungere se la rampa fosse più lunga e non terminasse in  $C$ .

**ESERCIZIO N°36**

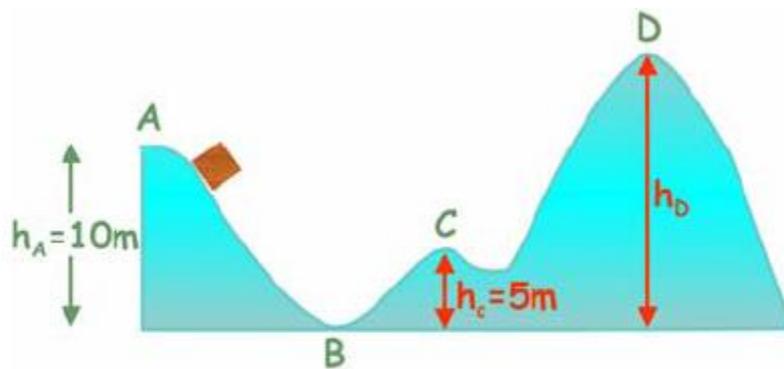
Un blocco di massa 2Kg è inizialmente a riposo nel punto  $A$  indicato in figura.. Se si applica una forza di 30N e che forma un angolo di  $37^\circ$  con piano inclinato il blocco percorre il tratto  $AB$  considerato senza attrito; successivamente attraversa un tratto  $BC$  scabro con una velocità di  $30\text{m/s}$  e si ferma in  $C$  a 30 metri da  $A$ .

Calcolare:

- il lavoro sul blocco nel tratto  $AB$
- La potenza media sviluppata nel tratto  $AB$ .
- la forza di attrito nel tratto  $BC$

**ESERCIZIO N°37**

Nella figura è rappresentato un punto materiale di massa 1Kg che percorre la traiettoria ABCD senza attrito. Passa per il punto A con velocità  $v$ ; per il punto B con una velocità tripla e alla fine si ferma in D.



Calcolare:

- il modulo della velocità con cui il punto materiale passa per A
- L'energia cinetica nel punto C
- L'altezza del punto D, dove si ferma.