FUNZIONI PERIODICHE

Definizione

Siano: f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, T un numero reale positivo. La funzione f si dice periodica in X, di periodo T se X soddisfa la seguente proprietà:

$$x \in X \Rightarrow x \pm T \in X$$

e per f vale l'uguaglianza

$$f(x \pm T) = f(x), \quad \forall x \in X$$

Proposizione

Se la funzione $f: X \subseteq R \rightarrow R$ è periodica in X di periodo T, allora l'insieme X gode della proprietà (più forte della precedente):

$$x \in X \Rightarrow x + kT \ \in X, \ \ \forall k \in Z$$

e la funzione f soddisfa l'uguaglianza

$$f(x \pm kT) = f(x), \quad \forall x \in X \ e \ \forall k \in Z$$

Regole pratiche per il calcolo del periodo delle funzioni reali

Il periodo delle funzioni $y = sinx$ e $y = cosx$ è 2π; il periodo delle funzioni $y = tgx$ e $y = cotgx$ è π

Date due funzioni $y = f_1(x)$ periodica di periodo T_1 e $y = f_2(x)$ periodica di periodo T_2 , il periodo di funzioni ottenute come somma, differenza, quoziente delle due funzioni date è:

$y = f_1(x) + f_2(x)$	**Se** $\boldsymbol{T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = T_1 = T_2}$
	Se $\boldsymbol{T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)}$
$y = f_1(x) - f_2(x)$	**Se** $\boldsymbol{T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}}$
	Se $\boldsymbol{T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)}$
$y = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$	**Se** $\boldsymbol{T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}}$
	Se $\boldsymbol{T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)}$
$y = f(kx)$	$\boldsymbol{\dfrac{T}{k}}$
$y = \lvert f(x) \rvert$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	$\boldsymbol{T}$ **per tangente e cotangente**

$y = [f(x)]^{2n}$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	$\boldsymbol{T}$ **per tangente e cotangente**
$y = [f(x)]^{2n+1}$	**T**
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	**T**

Osservazione

Quando i due periodi presentano una forma frazionaria e sono diversi tra loro, per calcolare il m.c.m. basta esprimere entrambi i periodi mediante frazioni di uguale denominatore e calcolare il m.c.m. dei numeratori e dividerlo per i denominatori

Esempio

Si calcoli il periodo della funzione $y = sin^2x - cos3x$

$$T = m.c.m.\left(2\pi;\ \frac{2}{3}\pi\right) = m.c.m.\left(\frac{2\pi}{2};\frac{2}{3}\pi\right) = m.c.m.\left(\frac{3}{3}\pi;\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$$