

Prof. Roberto Capone

Nozioni di Logica Matematica

Corso di Didattica della Matematica
2015/2015
Corso di Laurea in Scienze della Formazione
Primaria





Premesse

- In matematica non è ammesso un linguaggio ambiguo.
- Le parole chiave di questo linguaggio sono soltanto sette:

Connettivi	Quantificatori
Non	Esiste
E	Per ogni
O	
Se.... allora	
Se e solo se	

Le Proposizioni in Matematica



Roma è la capitale d'Italia

5 è un numero pari

I gatti sono mammiferi



Che tempo farà domani?

Va' a studiare!

Giulia è simpatica



Proposizioni semplici e composte

Roma è la capitale
d'Italia
I gatti sono
mammiferi

- Sono proposizioni elementari o atomiche

6 è un numero pari e
non è divisibile per 5
Se torno a casa ti
accompagno alla
stazione

- Sono proposizioni composte o molecolari

Enunciati aperti

X è un numero naturale maggiore di 7

- Alle frasi come questa in cui c'è una variabile si dà il nome di enunciati aperti

Dato un enunciato aperto, il sottoinsieme del dominio formato dagli elementi che trasformano l'enunciato aperto in una proposizione vera è detto **insieme di verità**

- Un enunciato aperto non è una proposizione

Negazione, disgiunzione, disgiunzione

- Data una proposizione si può costruire la sua negazione facendo precedere il connettivo «non» al predicato verbale.
- Se la proposizione «oggi c'è il sole» la indichiamo con la lettera p , la sua negazione la indicheremo con \bar{p}
- Si può esprimere il valore di verità della proposizione \bar{p} in funzione del valore di verità di p attraverso la tabella detta di verità

p	\bar{p}
V	F
F	V

La congiunzione

- Due proposizioni possono essere legate tra di loro dalla congiunzione «e» che in logica matematica viene indicata col simbolo \wedge
- Paolo ha preso 7 in italiano e 5 in matematica

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disgiunzione

- Due proposizioni possono essere legate dalla congiunzione «o» che in logica viene indicata col simbolo \vee
- Paolo gioca a tennis o a calcio

p	q	$p\vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

NEGAZIONE

CONGIUNZIONE

DISGIUNZIONE

A parole

Non p

p e q

p o q

In
simboli

\bar{p}

$p \wedge q$

$p \vee q$

Modo di
operare

Vera se p è
falsa

Falsa se p è
vera

Vera se sia p che q
sono vere

Falsa negli altri casi

Vera se almeno una
delle due è vera

Falsa se sia p che q
sono false

La tavola di verità $p \wedge (p \vee q)$

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Proposizioni logicamente equivalenti

- Due proposizioni si dicono logicamente equivalenti se le loro tavole di verità coincidono

$$p = q$$

Ad esempio sono equivalenti le proposizioni:

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$



I LEGGE DI
DE MORGAN



II LEGGE DI
DE MORGAN

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

Leggi di De Morgan

- La negazione della congiunzione di due proposizioni elementari equivale alla disgiunzione delle loro negazioni
- La negazione della disgiunzione di due proposizioni elementari equivale alla congiunzione delle loro negazioni

ESEMPIO

p : Paolo gioca a tennis

q : Paolo gioca a calcio

$p \wedge q$: Paolo gioca a tennis e a calcio

$\overline{p \wedge q}$: Non è vero che Paolo gioca a tennis e a calcio

$\overline{p} \vee \overline{q}$: Paolo non gioca a tennis o non gioca a calcio

Proprietà dei connettivi

Proprietà dei connettivi	Espressione
Legge della doppia negazione	$\bar{\bar{p}} = p$
Proprietà di idempotenza della congiunzione	$p \wedge p = p$
Proprietà di idempotenza della disgiunzione	$p \vee p = p$
Proprietà commutativa della congiunzione	$p \wedge q = q \wedge p$
Proprietà commutativa della disgiunzione	
Proprietà associativa della congiunzione Proprietà associativa della disgiunzione	
Proprietà distributive	
Leggi di assorbimento	
Leggi di De Morgan	

L'implicazione

- Due proposizioni possono essere collegate dalla locuzione «se... allora» e si indica col simbolo

\Rightarrow

Esempio:

Se arrivo tardi alla stazione, allora perdo il treno

Essa è formata legando tra loro due proposizioni

p: se arrivo tardi alla stazione

q: perdo il treno

$$p \Rightarrow q$$

p si chiama premessa

q si chiama conseguenza

La tavola di verità $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La tavola di verità $p \Rightarrow q$

- Date le proposizioni p : Milano è una città italiana e q : Milano è una città europea, esprimiamo a parole $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow \bar{q}$, $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ e ne determiniamo il valore di verità

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \Rightarrow q$	Se Milano è una città italiana allora è una città europea	V
$p \Rightarrow \bar{q}$	Se Milano è una città italiana allora non è una città europea	F
$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$	Se Milano non è una città italiana allora non è una città europea	V

La negazione di una implicazione

- Proviamo a confrontare le tavole di verità di $p \Rightarrow q$ e di $\bar{p} \wedge q$
- Si noterà che $p \Rightarrow q$ e $\bar{p} \wedge q$ sono logicamente equivalenti.
- La negazione di $p \Rightarrow q$ è equivalente a $p \wedge \bar{q}$

La negazione di una implicazione

p	q	\bar{p}	$\bar{p} \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V



p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La negazione di una implicazione

- Neghiamo la proposizione: «**se esco presto dal lavoro, vengo a cena da te**»

Se poniamo p :esco presto dal lavoro

q : vengo a cena da te.

La proposizione assegnata è l'implicazione:

$$p \Rightarrow q$$

La sua negazione è la proposizione:

$p \wedge \bar{q}$:**esco presto dal lavoro e non vengo da te**

La negazione di una implicazione

- Date le proposizioni

p : 4 è pari

q : 4 è primo

Esprimi a parole le proposizioni

$p \Rightarrow q$, $\bar{p} \Rightarrow q$, $p \Rightarrow \bar{q}$ e determina il loro valore di verità

- Scrivi la negazione della proposizione: se domani c'è il sole, vengo con te al mare

La doppia implicazione

- Il connettivo «se e solo se»

Si dice inversa di una proposizione del tipo $p \Rightarrow q$, la proposizione $q \Rightarrow p$.

Per esempio, l'inversa della proposizione:

Se un triangolo è equilatero allora è isoscele

È la proposizione:

Se un triangolo è isoscele allora è equilatero

In questo caso, mentre la proposizione $p \Rightarrow q$ è **vera**, la proposizione inversa è **falsa**

La doppia implicazione

- Se invece la proposizione p è vera ed è vera anche la sua inversa, allora si può usare il connettivo «**se e solo se**»

$p \Leftrightarrow q$ è equivalente a $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La doppia implicazione

- Il connettivo \Leftrightarrow opera su una coppia di proposizioni p , q producendo la proposizione composta $p \Leftrightarrow q$ che risulta vera se e solo se p e q sono entrambe false o entrambe vere.

ESEMPIO

Date le proposizioni p : la luna è una stella; q : Giove è un pianeta; esprimiamo a parole le proposizioni $p \Leftrightarrow q$ e $\bar{p} \Leftrightarrow q$; poi stabiliamo il loro valore di verità



La doppia implicazione

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \Leftrightarrow q$	La luna è una stella se e solo se Giove è un pianeta	p è falsa e q è vera, quindi: $p \Leftrightarrow q$ è falsa
$\bar{p} \Leftrightarrow q$	La luna non è una stella se e solo se Giove è un pianeta	\bar{p} è vera e q è vera, quindi: $\bar{p} \Leftrightarrow q$ è vera

La doppia implicazione

- La proposizione $p \Leftrightarrow q$ può essere letta in vari modi:
 - p se e solo se q
 - p equivale a q
 - se p allora q e viceversa
 - P è condizione necessaria e sufficiente per q

Un triangolo è equilatero se e solo se ha i tre angoli congruenti

Per un triangolo essere equilatero è equivalente ad avere tutti gli angoli congruenti

Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero è che abbia i tre angoli congruenti

Se un triangolo è equilatero allora ha tutti gli angoli congruenti e viceversa

Tautologie e regole di deduzione

- Una proposizione composta si dice:
 - ❖ **Tautologia** se risulta sempre vera, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni elementari che la compongono;
 - ❖ **Contraddizione** se risulta sempre falsa, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni elementari che la compongono

Regole di deduzione

- Una regola di deduzione si dice valida se porta a una deduzione corretta indipendentemente dai valori di verità delle proposizioni coinvolte nel ragionamento

modus
ponens

$$\bullet (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

modus
tollens

$$\bullet ((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}) \Rightarrow q$$

sillogismo
ipotetico

$$\bullet ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Regole di deduzione

regola	esempio	Formalizzazione	In simboli
Modus ponens	<p>Premesse: Socrate è uomo Se Socrate è mortale Conclusione Socrate è mortale</p>	<p>Premesse: p $p \Rightarrow q$</p> <p>Conclusione q</p>	$\frac{p \quad p \Rightarrow q}{\therefore q}$
Modus tollens	<p>Premesse: Se Socrate è un uomo allora Socrate è mortale Socrate è immortale Conclusione: Socrate non è un uomo</p>	<p>Premesse $p \Rightarrow q$ \bar{q}</p> <p>Conclusione \bar{p}</p>	$\frac{p \Rightarrow q \quad \bar{q}}{\therefore \bar{p}}$
Legge del sillogismo ipotetico	<p>Premesse: Se Mario vince la partita allora esce con noi stasera Se Mario esce con noi stasera allora ti telefono Conclusione: Se Mario vince la partita allora ti telefono</p>	<p>Premesse $p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow r$</p> <p>Conclusione $p \Rightarrow r$</p>	$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}$

I quantificatori

Quantificatore
universale

- Per ogni
- \forall

Quantificatore
esistenziale

- esiste
- \exists

I quantificatori

- Il quantificatore \forall si usa per esprimere che una certa proprietà è vera per tutti gli elementi di un insieme
- Il quantificatore \exists si usa per esprimere che esiste almeno un elemento di un insieme che soddisfa una certa proprietà

Ogni uomo è mortale	$\forall x \in \{x \mid x \text{ è un uomo}\}, x \text{ è mortale}$	V
Esiste un numero naturale che è multiplo di 3 e di 5	$\exists x \in N \mid x \text{ è multiplo di 3 e di 5}$	V
Comunque scelto un numero naturale, esiste un numero naturale che lo precede	$\forall x \in N, \exists y \in N \mid y < x$	F <small>0 non è preceduto da alcun numero naturale</small>

La Logica da Aristotele a Goedel

- Si deve ad Aristotele - che esaminò i concetti, le categorie, le proposizioni, i termini e i sillogismi - la prima formulazione della logica come scienza propedeutica a ogni possibile conoscenza.
- Il contenuto degli oggetti e la loro origine sono stati approfonditi dalla logica medievale, specie dalla scolastica che distinse in *logica minor* e *logica maior*. Con il *Novum Organum*, Francesco Bacone cercò di costruire una nuova metodologia basata sull'induzione impostando la logica come strumento di indagine scientifica.

La Logica da Aristotele a Goedel

- Riprendendo questi temi René Descartes cercò di stabilire se il rigore tipico di un discorso matematico potesse essere alla base di qualsiasi sapere, compreso quello filosofico
- Sempre sul calcolo matematico Thomas Hobbes pensò la logica come una combinazione di segni e regole
- Gottfried Leibniz e i suoi seguaci cercarono poi di unificare il complesso delle strutture logico/linguistiche in un linguaggio scientifico universale, ossia la "logica simbolica e combinatoria»

La Logica da Aristotele a Goedel

- Nel '700 il contributo delle correnti filosofiche non fu così importante per lo sviluppo della logica moderna, ed Immanuel Kant nella sua *Critica della ragion pura* definì la logica trascendentale come quella parte della logica generale che tratta della possibilità e delle modalità per cui la conoscenza può riferirsi ai concetti empirici.
- Sarà solo nella seconda metà del XIX secolo che la logica tornerà a studiare gli aspetti formali del linguaggio, ovvero la logica formale, e a essere trattata con metodi naturalistici da Christoph Sigwart e Wilhelm Wundt, portando conseguentemente allo sviluppo della logica matematica.

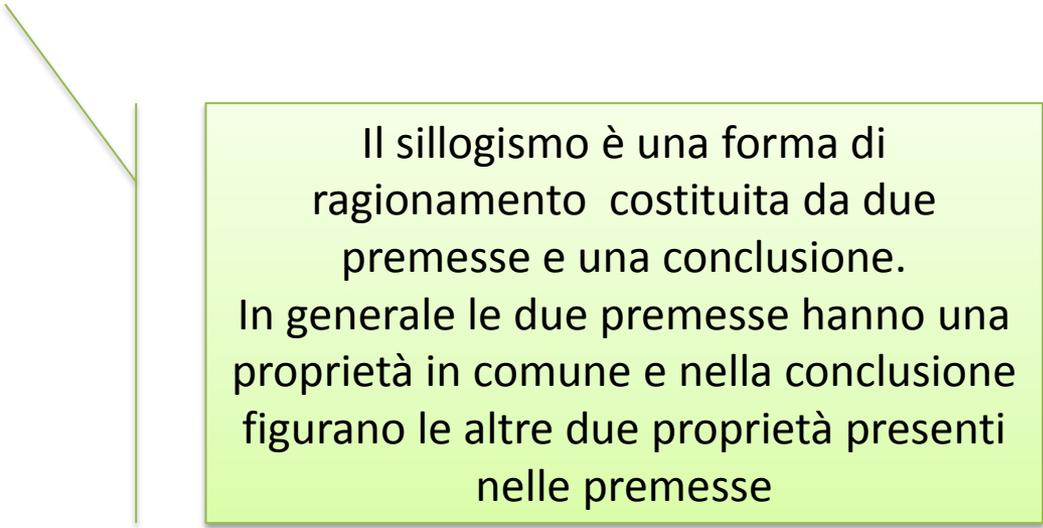
La Logica da Aristotele a Goedel

Con la fisica moderna (la meccanica quantistica) si è però passati da una logica aristotelica o del terzo escluso, ad una eraclitea (antidialettica) che invece lo include sostituendo il principio di non contraddizione con quello di complementare contraddittorietà.

Poiché un quanto può essere e non essere contemporaneamente due rappresentazioni opposte di una stessa realtà: particella ed onda.

Cosa che poi rappresenta il vero paradosso del divenire della realtà in generale quando "nello stesso fiume scendiamo e non scendiamo; siamo e non siamo" (Eraclito).

Sillogismi: esercizi

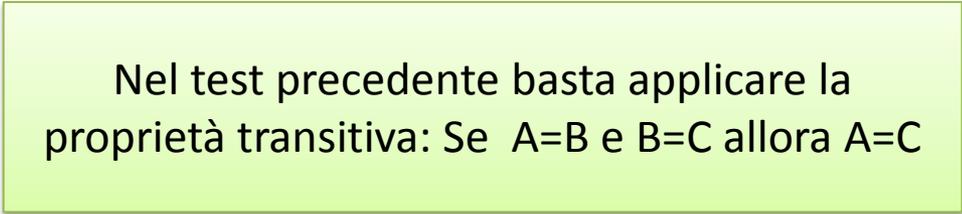


Il sillogismo è una forma di ragionamento costituita da due premesse e una conclusione.

In generale le due premesse hanno una proprietà in comune e nella conclusione figurano le altre due proprietà presenti nelle premesse

«Tutti i professori sono cattivi. Carlo è un professore» in base alle precedenti informazioni, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera

- A. Carlo non è cattivo
- B. Tutte le persone cattive sono professori
- C. Carlo è cattivo
- D. Alcuni professori sono buoni
- E. Nessuna delle precedenti



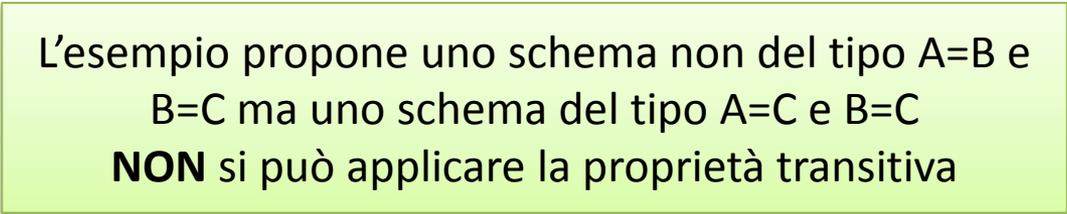
Nel test precedente basta applicare la proprietà transitiva: Se $A=B$ e $B=C$ allora $A=C$



C

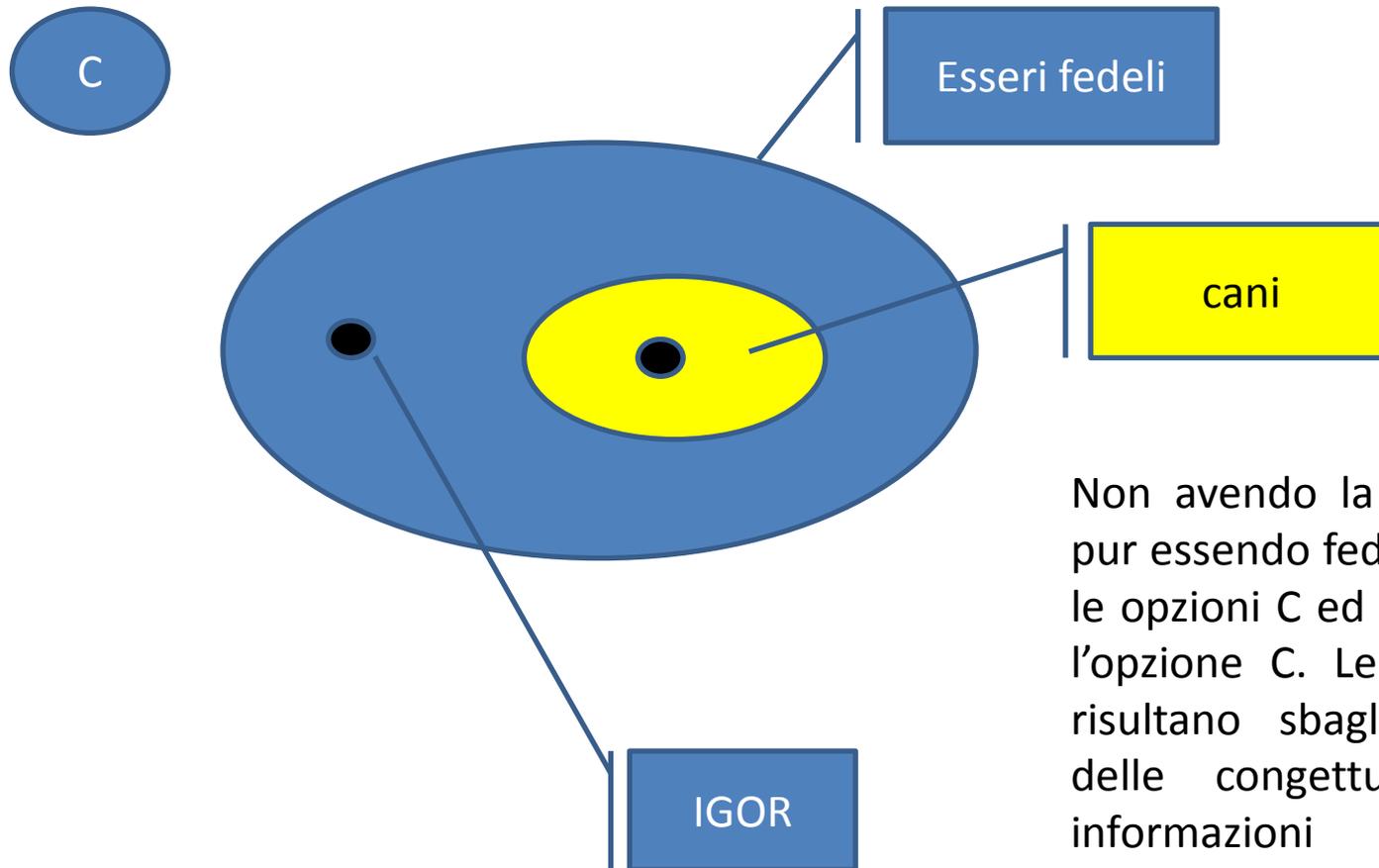
Tutti i cani sono fedeli. Igor è fedele. Quindi:

- A. Igor non sa abbaiare
- B. Igor è il mio cane
- C. Igor potrebbe essere un cane
- D. Tutti gli animali di nome Igor sono cani
- E. Sicuramente Igor è un cane



L'esempio propone uno schema non del tipo $A=B$ e $B=C$ ma uno schema del tipo $A=C$ e $B=C$
NON si può applicare la proprietà transitiva

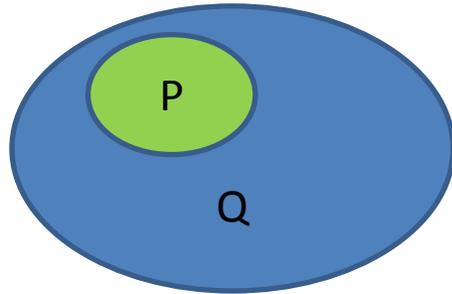
Eulero-Venn



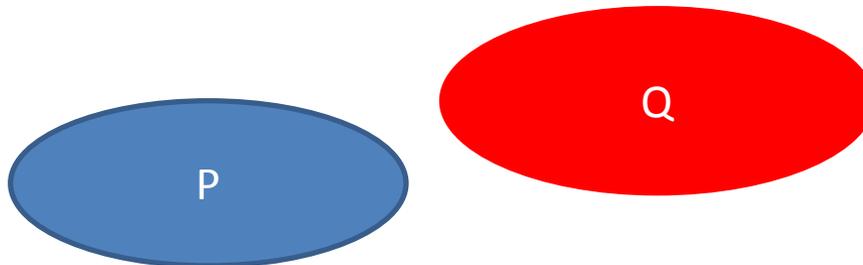
Non avendo la certezza che Igor, pur essendo fedele sia un cane, tra le opzioni C ed E bisogna scegliere l'opzione C. Le risposte A,B e D risultano sbagliate perché sono delle congetture ovvero delle informazioni che potrebbero essere corrette ma non puoi dedurle con certezza dalle due proposizioni iniziali

Sillogismi più capziosi

Forma universale affermativa del tipo «Tutti i P sono Q», oppure «Ogni P è Q»: è la situazione in cui P è un sottoinsieme di Q

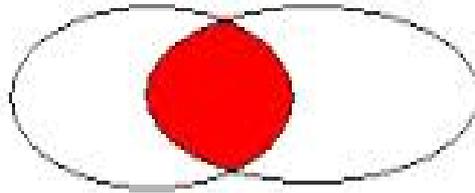


Forma universale negativa del tipo «tutti i P non sono Q» oppure «Nessun P è Q»

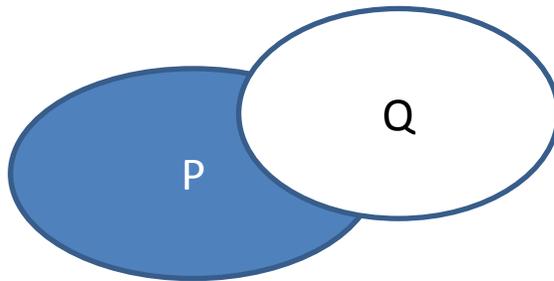


Sillogismi più capziosi

Forma particolare affermativa del tipo «Alcuni P sono Q» oppure «Esiste un P che è Q»



Forma particolare negativa del tipo «Alcuni P non sono Q» oppure «Esiste un P che non è Q»



Esempi

1. Tutti i condottieri sono valorosi, nessun valoroso è dissimulatore; dunque è condottiero. Si individui il corretto completamento del sillogismo:

- A. Qualche condottiero
- B. Qualche dissimulatore
- C. Nessun valoroso
- D. Ogni dissimulatore
- E. Nessun dissimulatore

2. Ogni uomo è mammifero, qualche animale è uomo; dunque è mammifero

- A. Ogni animale
- B. Ogni mammifero
- C. Qualche uomo
- D. Qualche animale
- E. Ogni uomo

Esempi

Il latte è nutriente. Paola beve acqua. Quindi:

- A. Paola non sa nutrirsi
- B. Non è detto che Paola abbia bisogno di nutrimento
- C. Sicuramente Paola voleva dissetarsi
- D. Paola voleva bere acqua minerale
- E. Paola ha bisogno di bere spesso

Tutti i muratori sono abili pittori; Michele è un abile pittore. In base alle precedenti informazioni quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- A. Non è possibile concludere che Michele sia un muratore
- B. Michele non è un muratore
- C. Solo Michele è un abile pittore
- D. Chi è un abile pittore è anche un muratore
- E. Michele è certamente un muratore

Bibliografia

