

Prof. Roberto Capone

Euclide (parte IV)

Corso di Didattica della Matematica
2015/2016
Corso di Laurea in Scienze della Formazione
Primaria



Elementi di Geometria euclidea

Proporzionalità tra grandezze

Date quattro grandezze A, B, C e D, le prime due omogenee tra loro così come le ultime due, queste formano una proporzione se il rapporto delle prime due è uguale al rapporto delle ultime due. Si scrive

$$A : B = C : D$$

e si legge “A sta a B come C sta a D”.

In una proporzione

- il primo ed il terzo termine (A e C) si chiamano antecedenti;
- il secondo ed il quarto termine (B e D) si chiamano conseguenti;
- B e C si chiamano medi;
- A e D si chiamano estremi;
- la grandezza D si chiama quarta proporzionale.

Elementi di Geometria euclidea

Se in una proporzione tra grandezze tutte omogenee i medi sono uguali tra loro $A : B = B : C$, la proporzione si dice continua, la grandezza B si chiama media proporzionale e la grandezza C si dice terza proporzionale.

Teorema (fondamentale delle proporzioni). Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro grandezze siano in proporzione è che siano in proporzione le loro misure.

Proprietà Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro numeri siano in proporzione è che il prodotto dei medi sia uguale al prodotto degli estremi.

Elementi di Geometria euclidea

Proprietà delle proporzioni

Proprietà dell'invertire

Scambiando ogni antecedente col proprio conseguente otteniamo una nuova proporzione equivalente alla precedente.

$$A : B = C : D \quad) \quad B : A = D : C.$$

Proprietà del permutare Se le quattro grandezze sono tutte omogenee, possiamo scambiare tra loro i medi o gli estremi, ed otterremo sempre una nuova proporzione equivalente alla precedente.

$$A : B = C : D \quad) \quad D : B = C : A.$$

Proprietà del comporre La somma delle prime due grandezze sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la somma delle altre due sta alla terza (o alla quarta).

$$A : B = C : D \quad) \quad (A + B) : A = (C + D) : C$$

e

$$A : B = C : D \quad) \quad (A + B) : B = (C + D) : D$$

Elementi di Geometria euclidea

Proprietà dello scomporre La differenza tra la prima e la seconda grandezza sta alla prima (o alla seconda) grandezza come la differenza tra le altre due sta alla terza (o alla quarta). Questa proprietà richiede che ogni antecedente sia maggiore del proprio conseguente. Se dunque $A > B$ e $C > D$ avremo che

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : A = (C - D) : C$$

e

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : B = (C - D) : D$$

Teorema (della quarta proporzionale). Date tre grandezze A , B e C , con A e B omogenee tra loro, esiste ed è unica una grandezza D , omogenea alla terza, che con le tre date formi una proporzione.

Teorema Condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che

- a grandezze uguali della prima classe corrispondano grandezze uguali della seconda;
- alla somma di due o più grandezze della prima classe corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti della seconda classe.

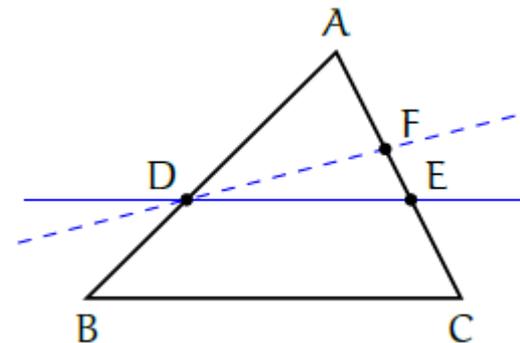
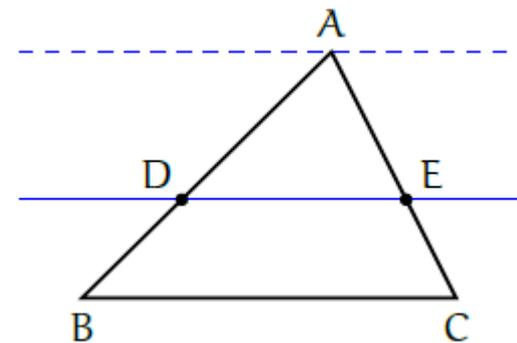
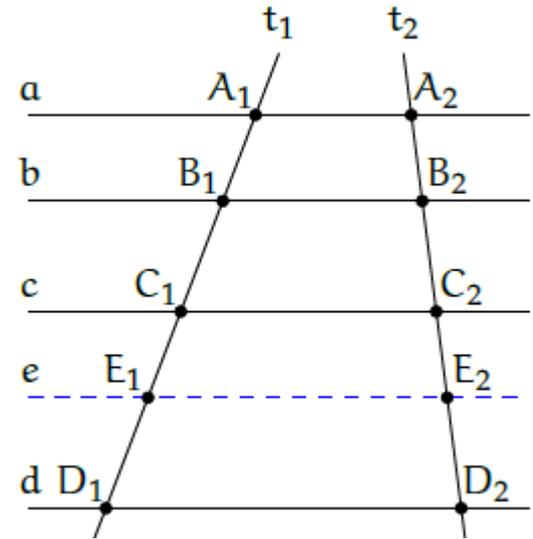
Elementi di Geometria euclidea

Teorema (di Talete). Un fascio di rette parallele determina su due trasversali classi di segmenti direttamente proporzionali.

Conseguenze del teorema di Talete

Una retta parallela ad un lato di un triangolo determina sugli altri due lati, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali.

La retta che divide due lati di un triangolo (o i loro prolungamenti) in segmenti proporzionali è parallela al terzo lato.



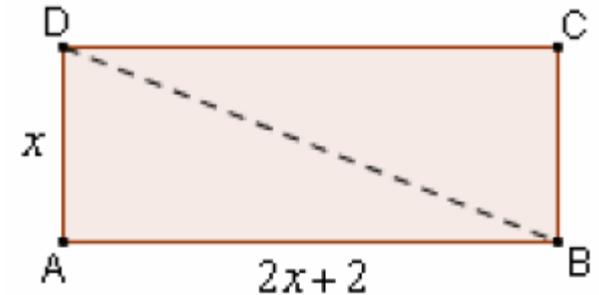
Elementi di Geometria euclidea

Problemi di I grado

In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm. Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il disegno,
cercando di restare più fedeli possibile
ai dati del problema.

*In questo caso, ad esempio,
occorrerà disegnare la base
in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza*

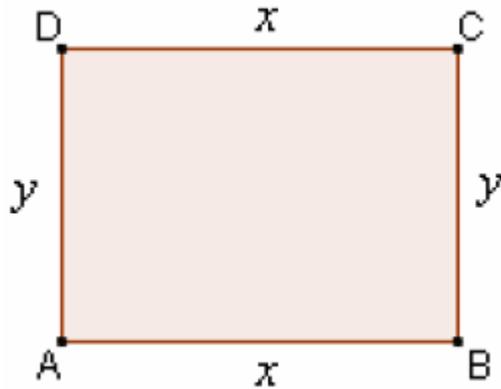


Accanto ad disegno,
scriviamo tutti i dati,
sia quelli geometrici che quelli numerici.
E scriviamo anche,
con accanto dei punti interrogativi,
quali sono le richieste del problema.

ABCD rettangolo
 $AB = 2AD + 2 \text{ cm}$
 $2p(\text{ABCD}) = 34 \text{ cm}$
 $S(\text{ABCD}) = ? \quad BD = ?$

Elementi di Geometria euclidea

Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza, e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.



ABCD rettangolo

$$2p(\text{ABCD}) = 3AD + 10 \text{ cm}$$

$$3AB - 2AD = 12 \text{ cm}$$

$$AB = ? \quad AD = ?$$

$$AB = DC = x$$

$$AD = BC = y$$

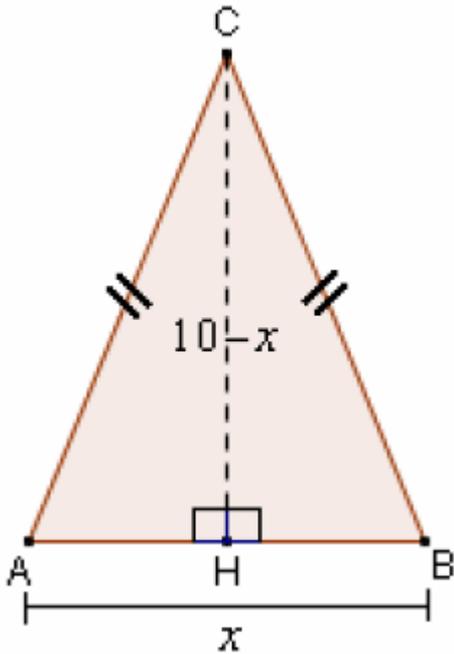
$$\begin{cases} 2x + 2y = 3y + 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$x = AD = 6$$

Elementi di Geometria euclidea

PROBLEMI GEOMETRICI DI 2° GRADO - ESEMPI SVOLTI

In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 10 cm, e l'area è di 12 cm².
Trovare il perimetro.



$$CA = CB$$

$$CH \perp AB$$

$$AB + CH = 10 \text{ cm}$$

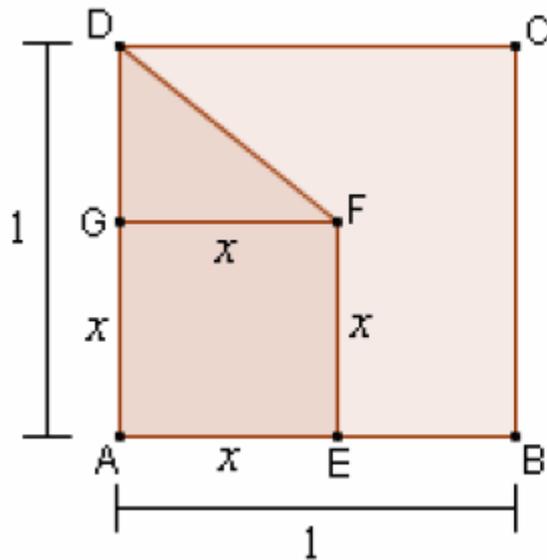
$$S(ABC) = 12 \text{ cm}^2$$

$$2p(ABC) = ?$$

Elementi di Geometria euclidea

Un quadrato ABCD ha lato unitario.

All'interno del lato AB è stato preso un punto E costruendo poi, internamente ad ABCD, un altro quadrato AEFG; infine si è congiunto F con D. L'area del trapezio AEFD risulta essere $\frac{3}{8}$ dell'area di ABCD. Quanto misura AE?



ABCD quadrato

$$AB = BC = CD = DA = 1$$

AEFG quadrato

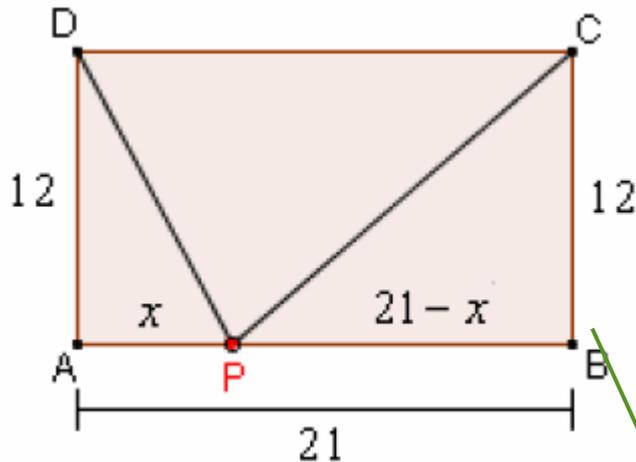
$$S(\text{AEFD}) = \frac{3}{8} \cdot S(\text{ABCD})$$

AE = ?

Elementi di Geometria euclidea

Un rettangolo ABCD ha base AB = 21 cm e altezza AD = 12 cm. Determinare, sul segmento AB, un punto P **IN MODO CHE** risulti:

$$PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$$



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$AB = 21 \text{ cm}, \quad AD = 12 \text{ cm}$$

? P su AB **in modo che** $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$
CONDIZIONE

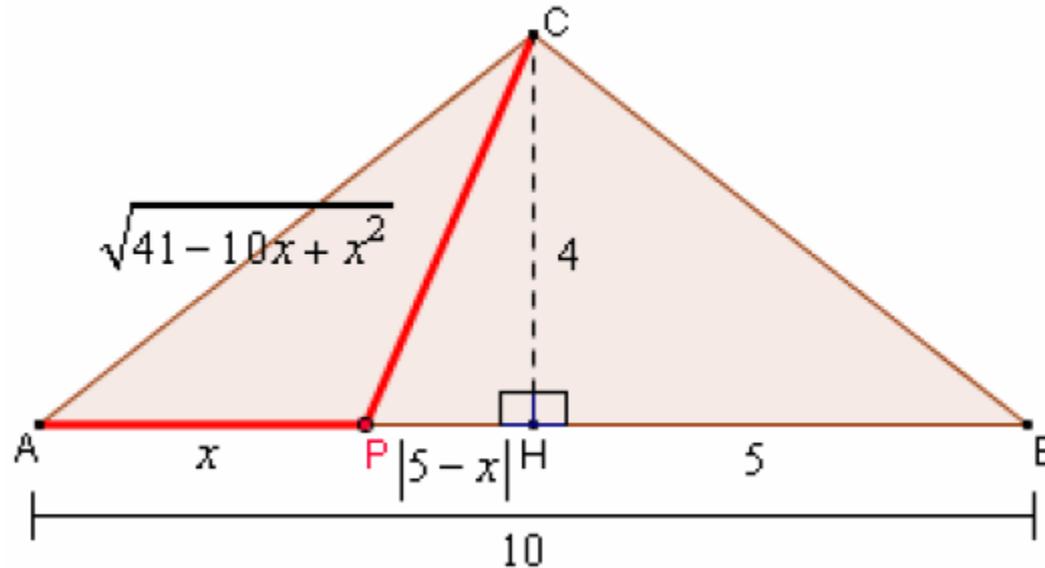
Si tratta di:

- 1) **PORRE** l'incognita x
- 2) **ESPRIMERE** per mezzo di x , tutte le quantità che compaiono nella **CONDIZIONE**
- 3) **SOSTITUIRE** nella **CONDIZIONE** le espressioni trovate, **ottenendo così l'equazione risolvibile**.

I problemi di questa tipologia, nei quali è richiesto di **determinare un punto** (su di un segmento, o una semiretta, o una retta, o una circonferenza, ecc. ecc.) **IN MODO CHE** sia verificata una certa **CONDIZIONE**, sono particolarmente importanti.

Elementi di Geometria euclidea

Sulla base $AB = 10$ cm di un triangolo isoscele ABC , la cui altezza CH misura 4 cm, determinare un punto P **in modo che** risulti $PA^2 + 5PC^2 = 129 \text{ cm}^2$



$$CA = CB$$

$$AB = 10 \text{ cm}$$

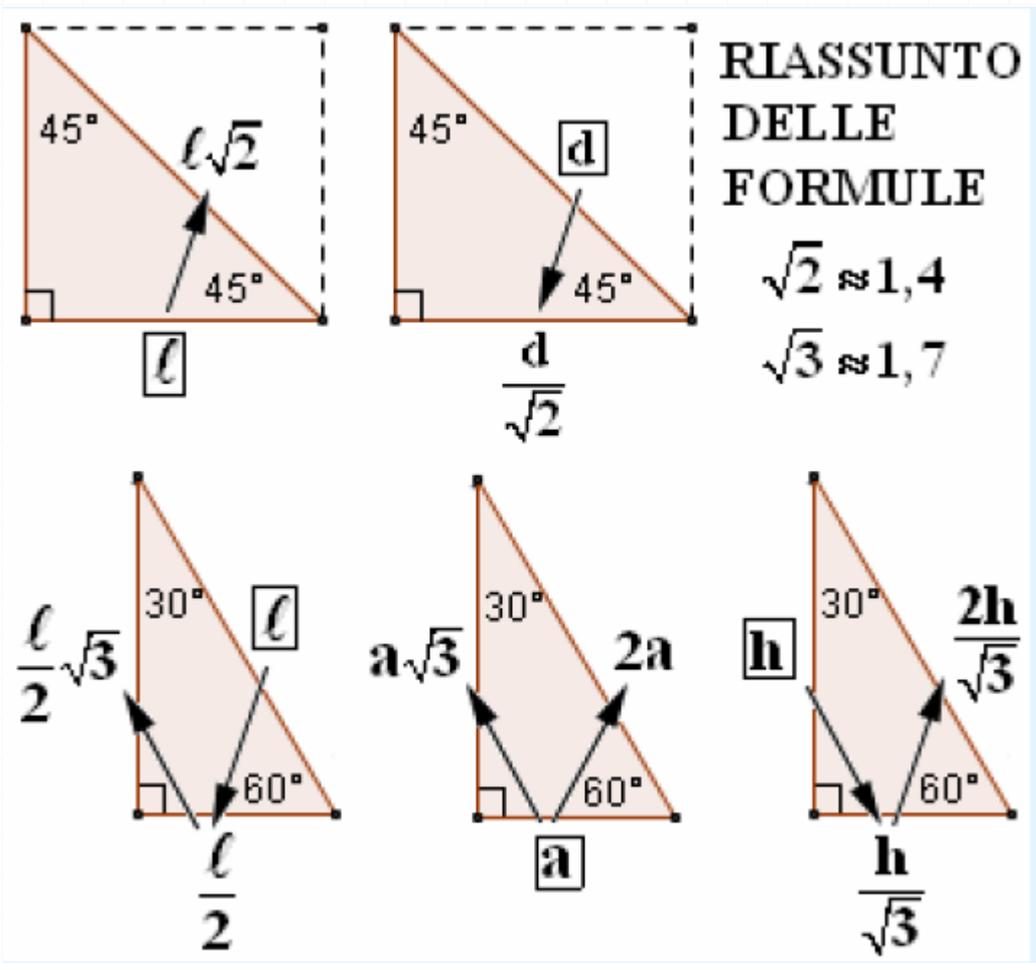
$$CH = 4 \text{ cm (} CH \perp AB \text{)}$$

? P su AB **in modo che**

$$PA^2 + 5PC^2 = 129 \text{ cm}^2$$

Elementi di Geometria euclidea

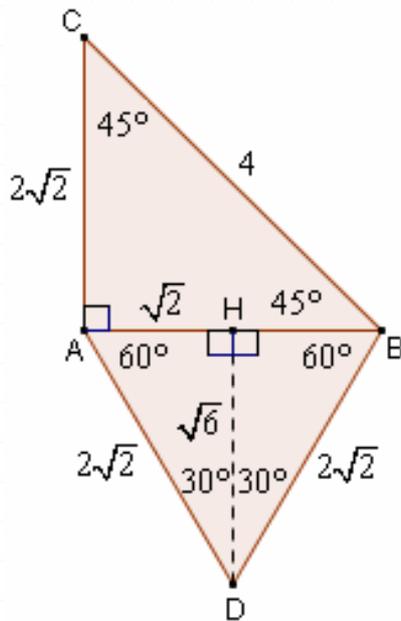
Triangoli rettangoli particolari



Elementi di Geometria euclidea

Sul lato AB del triangolo ABC, rettangolo in A e isoscele, si costruisce il triangolo equilatero ABD.

E' noto che $BC = 4$ cm; si desidera determinare perimetro e area del quadrilatero ACBD.



$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$AB = AC$$

$$AD = DB = AB$$

$$BC = 4 \text{ cm}$$

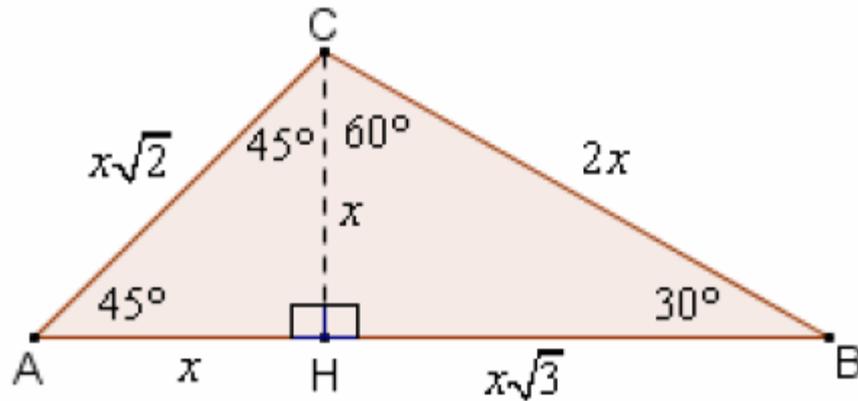
$$2p(ACBD) = ?$$

$$S(ACBD) = ?$$

Elementi di Geometria euclidea

Un triangolo ABC ha i due angoli di vertice A e B che misurano 45° e 30° rispettivamente.

Si sa che il perimetro del triangolo misura $2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$. Quanto misura la sua area?



Elementi di Geometria euclidea

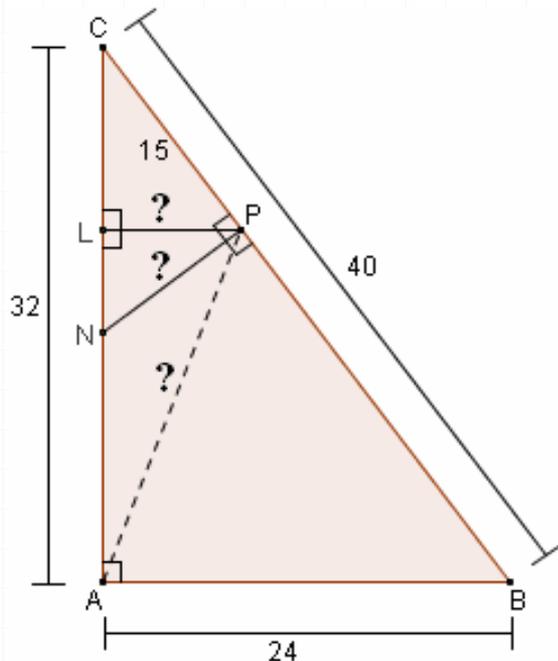
Problemi con le similitudini

In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm.

Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP=15 cm e per P si tracciano:

- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
- e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.

Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$AB = 24 \text{ cm}$$

$$AC = 32 \text{ cm}$$

$$CP = 15 \text{ cm}$$

$$PL \perp AC$$

$$PN \perp BC$$

$$PL = ?$$

$$PN = ?$$

$$PA = ?$$

Elementi di Geometria euclidea

$$BC \underset{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

LPC ~ ABC (rettangoli, \hat{C} in comune)

$$\mathbf{PL : AB = PC : BC}$$

*(un lato
sta al suo corrispondente,
come un altro lato
sta al suo corrispondente)*

$$PL : 24 = 15 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{24^3 \cdot 15^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

$$\mathbf{PL : PC = AB : BC}$$

*(un lato sta a un altro lato
- sempre nello stesso triangolo -
come il corrispondente del primo
sta al corrispondente del secondo)*

$$PL : 15 = 24 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{15^3 \cdot 24^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

Elementi di Geometria euclidea

PNC ~ ABC (rettangoli, \hat{C} in comune)

$$\mathbf{PN : AB = PC : AC}$$

*(un lato
sta al suo corrispondente,
come un altro lato
sta al suo corrispondente)*

$$\mathbf{PN : 24 = 15 : 32}$$

$$\boxed{\mathbf{PN = \frac{24^3 \cdot 15}{324} = \frac{45}{4} \text{ cm}}}$$

$$\mathbf{PN : PC = AB : AC}$$

*(un lato sta a un altro lato
- sempre nello stesso triangolo -
come il corrispondente del primo
sta al corrispondente del secondo)*

$$\mathbf{PN : 15 = 24 : 32}$$

$$\boxed{\mathbf{PN = \frac{15 \cdot 24^3}{324} = \frac{45}{4} \text{ cm}}}$$

Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

$$\mathbf{CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}}$$

$$\mathbf{AL = AC - CL = 32 - 12 = 20 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\mathbf{PA = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \sqrt{481} \text{ cm}}}$$



ORA TOCCA A TE!

Elementi di Geometria euclidea

Problemi da svolgere

- 1) In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{5}{6}$ della base, e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?
- 2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.
- 3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm e per rapporto $\frac{4}{5}$. Quanto misura ciascuno dei tre lati?
- 4) In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm mentre è di 19 cm la diff. fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.
- 5) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64. Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.
- 6) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro, e la loro somma misura cm 21. Quanto misura il perimetro?
- 7) In un triangolo isoscele DEF, di base EF, si ha $EF+DE = m\ 11$, e $2EF+3DE = m\ 27$. Determina i lati del triangolo e la sua area.
- 8) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di 36cm^2 . Quanto misura il lato del quadrato?

Elementi di Geometria euclidea

SOLUZIONI

- 1) 48 cm; 108 cm² 2) 20 cm, 26 cm, 26 cm 3) 12 cm, 15 cm, 21 cm 4) 50 cm
5) lato obliquo = cm 20, base = cm 24, area = cm² 192, h = cm 19,2 6) 2p = 36 cm
7) EF = m 6, DE = DF = m 5, S = m² 12 8) 8 cm

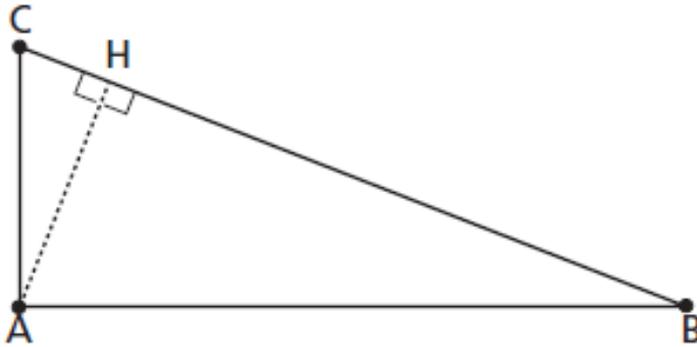
Elementi di Geometria euclidea

In un triangolo rettangolo ABC i cateti AB e BC sono rispettivamente di 10 cm e di 24 cm. Prendi un punto P sull'ipotenusa in modo che Traccia da P la retta parallela ad AB e indica con Q l'intersezione di tale retta con il cateto BC. Determina il perimetro del trapezio PQBA.

In un triangolo isoscele la differenza fra il doppio della base e l'altezza è di 8 cm. Sapendo che l'area è di 12 determina il perimetro del triangolo e il raggio della circonferenza inscritta.

Elementi di Geometria euclidea

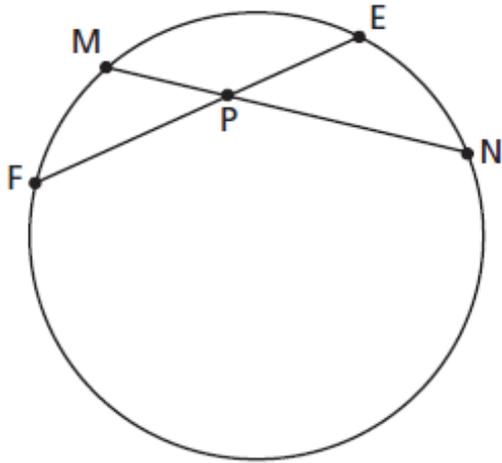
Dato il triangolo rettangolo della figura, quale delle seguenti proporzioni esprime il secondo teorema di Euclide?



- A** $BC : CA = CA : CH$
- B** $CA : BC = BC : CH$
- C** $AH : BH = AH : CH$
- D** $BH : CH = CH : AH$
- E** $BH : AH = AH : CH$

Elementi di Geometria euclidea

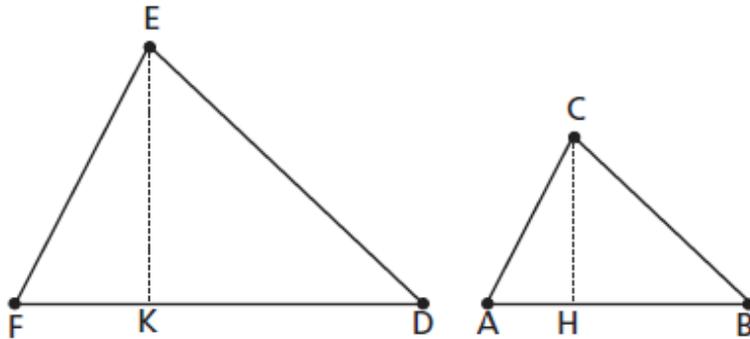
Quale fra le seguenti proporzioni, riferite alla figura, è *corretta*?



- A** $EP : MP = PN : PF$
- B** $EP : EM = FN : PF$
- C** $EP : PF = PN : PM$
- D** $EF : MN = PF : PN$
- E** $MP : ME = PF : PN$

Elementi di Geometria euclidea

I due triangoli in figura sono simili e risulta $AB = \frac{2}{3}FD$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?



- A** Il rapporto fra CH e EK è $\frac{3}{2}$.
- B** Il rapporto fra il perimetro del primo triangolo e il perimetro del secondo è $\frac{9}{4}$.
- C** Il rapporto fra il lato DE e il lato BC è $\frac{2}{3}$.
- D** Il rapporto fra le aree dei due triangoli è $\frac{9}{2}$.
- E** Il rapporto fra i raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli è uguale al rapporto fra i raggi dei cerchi circoscritti.

Elementi di Geometria euclidea

Un quadrato è inscritto in una circonferenza di raggio 3 cm. Quanto vale la lunghezza (in cm) del suo lato?

- A** 6. **B** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C** $6\sqrt{2}$. **D** $3\sqrt{2}$. **E** 3.

L'area di un triangolo equilatero di lato 6 cm vale:

- A** $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$. **B** 9 cm^2 . **C** $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. **D** $9\sqrt{3} \text{ cm}$. **E** $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Elementi di Geometria euclidea

Illustra il secondo teorema di Euclide scrivendo la relativa proporzione e motivandola con la similitudine.

Dimostra che il rapporto tra il raggio del cerchio circoscritto e il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo isoscele vale

I raggi delle circonferenze inscritte in due triangoli equilateri stanno tra loro in un rapporto $2 : 3$. Spiega perché le loro aree stanno in un rapporto $4 : 9$.

Elementi di Geometria euclidea

Un rettangolo ha l'area di 96 e la differenza tra il doppio della base e la metà dell'altezza è uguale a 29 cm. Determina la lunghezza delle diagonali.

In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è 20 cm più lunga di un cateto e questo è della sua proiezione sull'ipotenusa stessa. Determina il perimetro del triangolo.

Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 3 cm più dell'altro e il perimetro di 36 cm. Calcolane l'area.